

MODELING LARGE-ANGLE PENDULUM OSCILLATIONS WITH QUADRATIC DAMPING AND DAMPING ON THE STRING

Defrianto Pratama

Jurusan Teknik Elektro, Politeknik Negeri Bandung, defrianto.pratama@polban.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pendekatan teoritis yang tepat untuk osilasi bandul nyata dengan simpangan sudut awal besar dan memperhitungkan faktor redaman udara. Rekaman video gerak osilasi bandul nyata dianalisis dengan menggunakan software Tracker, untuk mendapatkan data percobaan. Persamaan gerak osilasi bandul nyata dimodelkan dengan persamaan diferensial nonlinier orde dua dengan memperhitungkan redaman linier, redaman kuadrat dan redaman pada tali bandul. Persamaan gerak bandul diselesaikan dengan metode Runge-Kutta Orde 4 kemudian hasilnya dibandingkan dengan data percobaan. Pemodelan dengan memperhitungkan redaman kuadrat dan redaman pada tali lebih mendekati fenomena nyata pada gerak bandul dibandingkan hanya memperhitungkan redaman linier.

Abstract

This study aims to find the right theoretical approach for real pendulum oscillations with large angles and include the air damping factor. Video of real pendulum oscillations were analyzed using Tracker software, to obtain experimental data. The real pendulum motion equation is modeled by a second order nonlinear differential equation by including linear damping, quadratic damping and damping on the pendulum string. The pendulum motion equation is solved by the 4th Order Runge-Kutta method then the results are compared with the experimental data. Modeling by considering quadratic damping and string damping is closer to the real phenomenon of pendulum motion than only considering linear damping.

Kata kunci: Bandul nyata; Osilasi teredam; Redaman kuadrat; Runge Kutta.

Pendahuluan

Gerak osilasi sangat penting untuk dipelajari terutama untuk mahasiswa prodi rekayasa, seperti penerapan osilasi teredam di sayap pesawat pada bidang rekayasa aeronautika (Lupi et al., 2018), penerapan pada konsep gelombang mekanik pada bidang rekayasa mesin dan rekayasa energi (Ganiev et al., 2015) hingga penerapan pada rangkaian osilasi listrik dan sinyal pada bidang rekayasa elektronika (Sawkmie & Mahato, 2019). Maka untuk itu mahasiswa harus mempunyai pemahaman yang utuh mengenai gerak osilasi.

Pembelajaran gerak osilasi tidak cukup hanya dengan teori di kelas saja, tetapi harus disertai dengan melakukan pengamatan langsung pada fenomena nyata (Rizki et al., 2021). Fenomena gerak osilasi yang paling sederhana dan sering dijadikan sebagai bahan pembelajaran yaitu gerak osilasi pada bandul. Sering kali dalam mempelajari gerak osilasi bandul menganggap bandul bergerak osilasi harmonis, hal ini berdasarkan perhitungan pendekatan jika bandul diberikan sudut simpangan awal yang sangat kecil (biasanya kurang dari 5^0)

dan efek redaman yang diabaikan. Gerak harmonis sederhana pada bandul akan mempunyai periode tetap (hanya bergantung pada panjang bandul serta percepatan gravitasi) dan amplitudo yang tetap. Akan tetapi, pada kenyataannya osilasi bandul selalu mengalami redaman, amplitudo bandul akan mengecil hingga bandul akan berhenti bergerak. Periode bandul jika disimpangkan dengan sudut yang besar akan bergantung pada sudut simpangan awal bandul (le et al, 2020). Pendekatan teoritis yang tepat perlu dicari untuk mempelajari lebih lanjut bagaimana gerak osilasi bandul pada fenomena nyata.

Penelitian ini sebagai studi awal dalam merancang kegiatan praktikum gerak osilasi bandul nyata dengan sudut simpangan awal besar dengan memperhitungkan faktor redaman.

Secara teori gaya gesekan benda jika bergerak pada fluida merupakan fungsi kecepatan sesuai dengan deret Taylor sekitar $v=0$.

$$f(v) = c_1v + c_2v^2 + c_3v^2 + \dots \quad (1)$$

Kita dapat melakukan pendekatan gaya gesek hingga suku kuadrat. Jika benda yang bergerak berbentuk bola dan kita gunakan pendekatan hingga suku kuadrat, maka fungsi gaya gesek menjadi :

$$f(v) = 6\pi\rho\mu r v + \frac{1}{2}C_D\rho A_P v^2 \quad (2)$$

Keterangan :

ρ = massa jenis fluida (ρ udara pada suhu ruang 1.204 kg/m³).

μ = viskositas fluida (μ udara pada suhu ruang 1.983 x 10⁵ Pa.s)

r = jari-jari bola

C_D = koefisien *drag* (pada penelitian ini digunakan sebesar 1.5 (Hafez, 2022))

A_P = luas proyeksi (bola $A_P = \pi r^2$)

Suku pertama dikenal dengan gaya *stokes* dan suku kedua gaya hambat (*drag force*). Gaya *stokes* berbanding lurus pada kecepatan linier dan gaya hambat berbanding lurus dengan kecepatan kuadrat.

Osilasi teredam dengan amplitudo besar harus diperhitungkan gaya hambat kuadrat (*quadratic drag force*) suku ke 2 dari persamaan 2 (Hauko & Replik, 2019).

Persamaan gerak bandul dengan simpangan awal sudut besar dan memperhitungkan gaya gesekan udara seperti pada persamaan 2 (Hafez, 2022) adalah sebagai berikut.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \left(\frac{c}{m}\right)\dot{\theta} - \frac{C_D\rho A_P L}{2m} |\dot{\theta}|\dot{\theta} \quad (3)$$

Dimana $c = 6\pi\rho\mu r$, suku kedua sebelah kiri pada persamaan adalah suku redaman linier dan suku ketiga sebelah kiri pada persamaan dan adalah suku redaman kuadrat.

Persamaan 3 merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua untuk gerak osilasi dengan memperhitungkan suku redaman linier dan suku redaman kuadrat.

Menurut Mohazzabi & Shankar (2015), gaya hambatan tali dengan udara perlu diperhitungkan untuk menganalisis gerak osilasi bandul teredam.

Gaya hambatan tali dapat dihitung dari torsi pada tali yang menghambat ayunan akibat gesekan tali dengan udara, sesuai persamaan 4.

$$\tau_s = \frac{kL^3 D}{3} \dot{\theta} \quad (4)$$

Torsi hambatan tali berbanding lurus dengan kecepatan sudut bandul, dengan D adalah diameter tali, L panjang bandul, dan $k=1.2$ merupakan konstanta (Mohazzabi & Shankar, 2015).

Jika memperhitungkan faktor hambatan tali, maka persamaan 3 menjadi:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \left(\frac{c}{m} + \frac{kLD}{3m}\right)\dot{\theta} - \frac{C_D\rho A_P L}{2m} |\dot{\theta}|\dot{\theta} \quad (5)$$

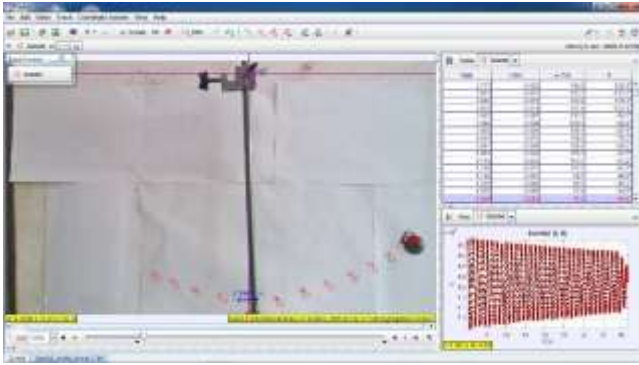
Persamaan 3 dan 5 akan sulit jika diselesaikan secara analitik, maka metode numerik Runge Kutta orde-4 menjadi pilihan penulis untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Metode Runge Kutta orde-4 sangat baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier (Albalawi et al, 2021).

Data hasil percobaan akan dibandingkan dengan hasil penyelesaian persamaan 5 menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Berdasarkan perbandingan tersebut akan ditentukan model yang tepat untuk osilasi bandul nyata.

Metode

Pada penelitian ini akan dibandingkan data hasil percobaan dengan perhitungan numerik Runge-Kutta orde 4 (RK-4) dalam menyelesaikan persamaan 5.

Kepala bandul yang digunakan berbentuk bola dengan diameter 30,0 mm, bermassa 110,0 gram dan terbuat dari logam besi. Tali bandul terbuat dari bahan nylon dengan diameter 0,5 mm dan panjang 33,0 cm. Bandul kemudian disimpangkan dengan sudut besar dan dijatuhkan tanpa kecepatan awal. Gerak osilasi bandul direkam menggunakan kamera *smartphone* dan kemudian rekamannya di analisis menggunakan *software Tracker* untuk mendapatkan data simpangan θ dan kecepatan sudut ω selama bandul berosilasi (Hernández, 2019). Tampilan *software tracker* dalam menganalisis gerak bandul dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Tampilan *software Tracker* dalam menganalisis gerak bandul.

Solusi dari persamaan 3 dihitung dengan metode RK-4. Persamaan 3 terlebih dahulu diubah menjadi :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \left(\frac{c}{m} + \frac{kLD}{3m}\right) \dot{\theta} - \frac{C_D \rho A_P L}{2m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} \quad (6)$$

Kemudian dimisalkan bahwa,

$$f(t, \theta, \omega) = \dot{\theta} = \omega \quad (7)$$

$$g(t, \theta, \omega) = -\frac{g}{L} \sin \theta - \left(\frac{c}{m} + \frac{kLD}{3m}\right) \omega - \frac{C_D \rho A_P L}{2m} \text{sign}(\omega) \omega^2 \quad (8)$$

Kemudian dilakukan literasi setiap *time step* $\Delta t=0.01s$ dan $n = 4000$ dengan metode RK-4 berikut :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t \quad (9)$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)\Delta t \quad (10)$$

$$k_1 = f(t_n, \theta_n, \omega_n) \quad (11)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \theta_n + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \omega_n + l_1 \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (12)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \theta_n + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \omega_n + l_2 \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (13)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, \theta_n + k_3 \Delta t, \omega_n + l_3 \Delta t) \quad (14)$$

$$l_1 = g(t_n, \theta_n, \omega_n) \quad (15)$$

$$l_2 = g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \theta_n + k_1 \frac{\Delta t}{2}, \omega_n + l_1 \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (16)$$

$$l_3 = g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, \theta_n + k_2 \frac{\Delta t}{2}, \omega_n + l_2 \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (17)$$

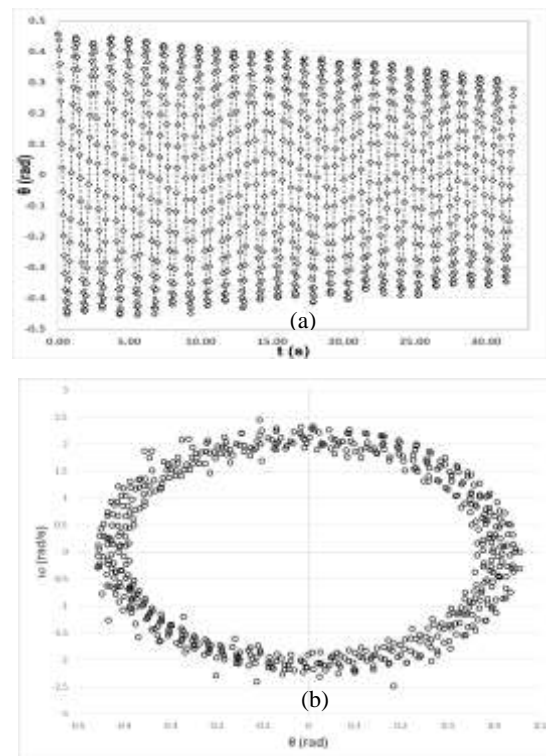
$$l_4 = g(t_n + \Delta t, \theta_n + k_3 \Delta t, \omega_n + l_3 \Delta t) \quad (18)$$

Perhitungan RK-4 digunakan untuk tiga kasus yang berbeda. Pertama, RK-4 digunakan untuk menghitung solusi jika hanya suku redaman linier yang diperhitungkan. Kedua, RK-4 digunakan untuk menghitung solusi jika suku redaman linier dan suku redaman kuadrat yang diperhitungkan tetapi redaman tali diabaikan. Kedua, RK-4 digunakan untuk menghitung solusi jika suku redaman linier dan suku redaman kuadrat beserta redaman tali diperhitungkan.

Hasil perhitungan simpangan θ dan kecepatan sudut ω dengan metode RK-4 akan dibandingkan dengan data percobaan yang dianalisis dari video menggunakan *software Tracker*.

Hasil dan Pembahasan

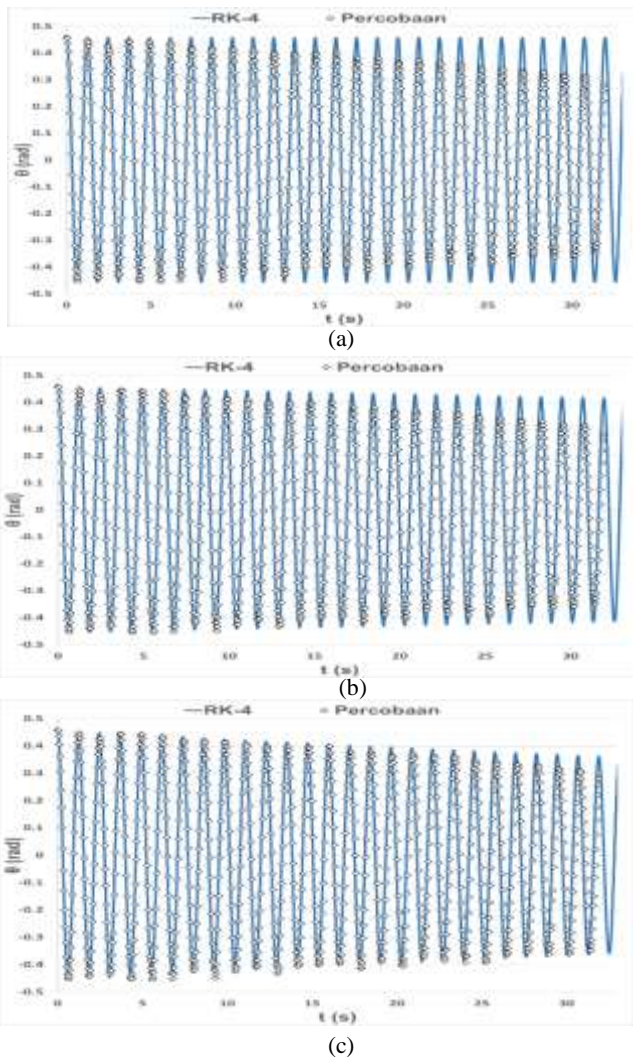
Pada penelitian ini menggunakan bandul dengan diameter 30,0 mm, massa 110,0 gram, panjang tali 33,0 cm. Bandul tersebut mula-mula disimpangkan dengan sudut 26.2^0 , kemudian gerakan bandul direkam menggunakan kamera *smartphone* dan video hasil rekaman dianalisis menggunakan *software tracker*. Grafik simpangan terhadap waktu dan diagram fase dari bandul tersebut dapat dilihat pada gambar 2.



Gambar 2. (a) Grafik simpangan bandul terhadap waktu dan (b) diagram fase bandul dari data percobaan dengan menggunakan *software tracker*.

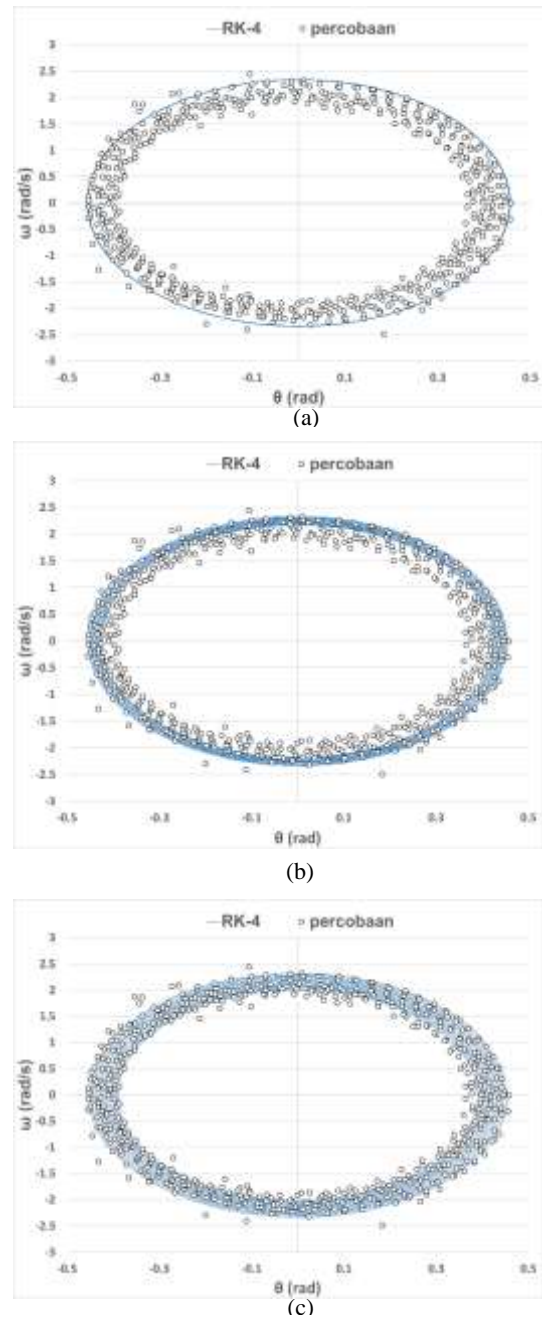
Gambar 2(a) menunjukkan bahwa bandul yang bergerak akan mengalami penurunan amplitudo akibat adanya redaman. Gambar 2(b) menunjukkan bahwa simpangan dan kecepatan mengalami penurunan selama bandul beresilasi.

Data hasil percobaan dengan berbantuan software tracker didekati dengan perhitungan numerik RK-4 dalam menyelesaikan persamaan 5. Perhitungan RK-4 dilakukan untuk tiga macam pendekatan yaitu; menganggap faktor redaman hanya dari suku linier, faktor redaman dari suku linier beserta suku kuadrat, dan faktor redaman dari suku linier beserta suku kuadrat dengan memperhitungkan redaman tali. Perbandingan hasil percobaan dengan perhitungan numerik RK-4 dapat dilihat pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3. Grafik simpangan bandul terhadap waktu dari perhitungan RK-4 dengan memperhitungkan; (a) redaman suku linier, (b) redaman suku linier beserta suku kuadrat, (c) redaman suku linier beserta kuadrat dan redaman tali, dibandingkan dengan data percobaan.

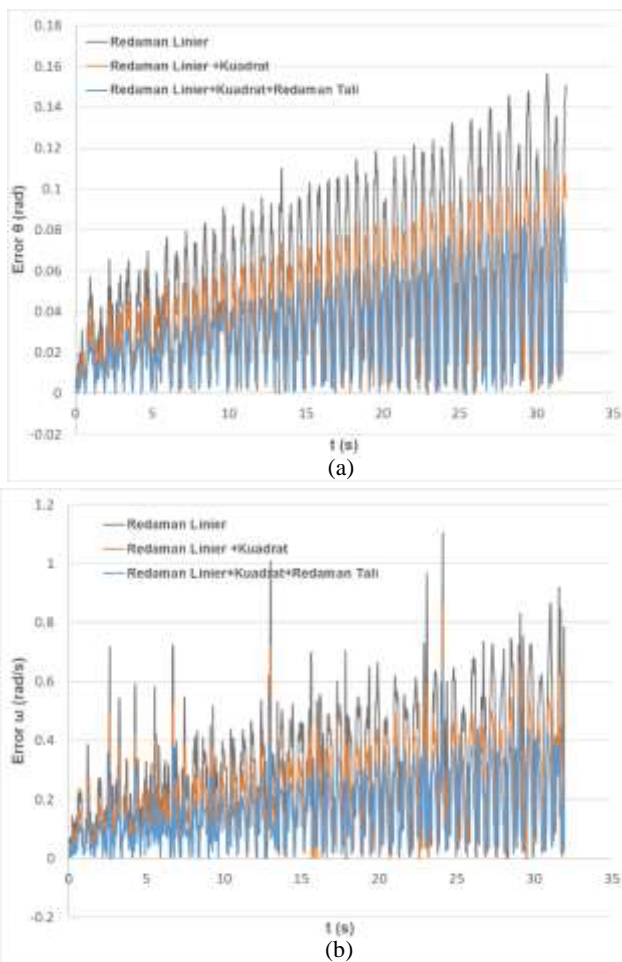
Gambar 3 menunjukkan bahwa perhitungan RK-4 dan data percobaan akan semakin mendekati jika memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali pada bandul, hal ini menunjukkan bahwa pada gerak bandul nyata dengan amplitudo besar, faktor redaman suku kuadrat dan redaman tali tidak bisa diabaikan. Perbandingan diagram fase antara hasil perhitungan RK-4 dengan data percobaan dapat dilihat pada gambar 4.



Gambar 4. Diagram fase dari perhitungan RK-4 dengan memperhitungkan; (a) redaman suku linier, (b) redaman suku linier beserta suku kuadrat, (c) redaman suku linier beserta kuadrat dan redaman tali, dibandingkan dengan data percobaan.

Gambar 4 menunjukkan bahwa jika hanya memperhitungkan suku redaman linier, simpangan dan kecepatan sudut dari bandul terlihat hampir tidak mengalami penurunan dibandingkan dengan hasil percobaan. Sedangkan, hasil perhitungan RK-4 dan data percobaan akan semakin mendekati jika memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali pada bandul. Maka dengan memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali pada gerak bandul akan semakin mendekati fenomena nyata.

Grafik nilai error atau nilai perbedaan antara hasil perhitungan RK-4 dengan data percobaan dapat dilihat pada gambar 5.



Gambar 5. Error antara perhitungan RK-4 dan data percobaan (a) simpangan dan (b) kecepatan sudut.

Gambar 5 menunjukkan bahwa nilai error antara hasil perhitungan RK-4 dengan data percobaan (data simpangan dan kecepatan sudut) mengalami kenaikan terhadap waktu. Kenaikan error perhitungan RK-4 dengan hanya memperhitungkan suku redaman linier lebih besar

dibandingkan dengan memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali. Hal ini menunjukkan bahwa dengan memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali pada perhitungan gerak bandul akan mendekati fenomena nyata. Tetapi, walaupun sudah memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali, nilai error semakin membesar terhadap waktu, hal ini disebabkan masih ada faktor lain yang diabaikan seperti gesekan tali pada poros rotasi dan gerak berputar (rotasi) bola bandul.

Rata-rata error perhitungan RK-4 dengan data percobaan dapat dilihat pada tabel 1.

Tabel 1. Rata-rata nilai error antara perhitungan RK-4 dan data percobaan.

Perhitungan RK-4 dengan :	Rata-rata nilai Error	
	θ (rad)	ω (rad/s)
Suku redaman linier	0.058	0.303
Suku redaman linier +kuadrat	0.041	0.212
Suku redaman linier +kuadrat + redaman tali	0.032	0.161

Tabel 1 menunjukkan bahwa rata-rata nilai error perhitungan RK-4 terhadap data percobaan semakin berkurang jika memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali, hal ini menunjukkan bahwa dengan memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali pada gerak bandul akan semakin dekat dengan fenomena nyata. Tetapi, walaupun sudah memperhitungkan suku redaman kuadrat dan redaman tali, rata-rata nilai error masih ada sebesar 0.032 rad (1.8°) untuk simpangan dan 0.161 rad/s ($9.2^\circ/s$) untuk kecepatan sudut. Jika memperhitungkan faktor lain yang diabaikan seperti gesekan tali pada poros rotasi dan gerak berputar (rotasi) bola bandul, diharapkan mendapatkan nilai error yang lebih kecil.

Berdasarkan seluruh hasil dari perhitungan RK-4 dan dibandingkan dengan data percobaan dapat menunjukkan bahwa perhitungan suku redaman kuadrat dan redaman tali dalam menganalisis gerak osilasi bandul dengan simpangan sudut besar sangat penting dilakukan, supaya hasil perhitungan mendekati fenomena nyata. Hal ini berdasarkan teori bahwa semakin cepat benda bergerak dalam fluida maka faktor gesekan akan semakin

mempengaruhi gerak benda tersebut (Kundu *et.al*, 2015). Bandul dengan sudut simpangan awal besar akan memiliki kecepatan lebih besar dibandingkan dengan sudut simpangan awal yang kecil sehingga harus memperhitungkan faktor redaman kuadrat dan redaman pada tali.

Kesimpulan

Pemodelan gerak osilasi bandul nyata dengan mempertimbangkan redaman linier, redaman kuadrat dan redaman tali lebih mendekati fenomena nyata jika dibandingkan dengan hanya memperhitungkan redaman linier saja atau hanya memperhitungkan redaman linier beserta redaman kuadrat saja.

Perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk faktor lain yang diabaikan seperti gesekan tali pada poros rotasi dan gerak beputarnya bola bandul.

Referensi

- Albalawi, W., Salas, A. H., El-Tantawy, S. A., & Youssef, A. A. A. R. (2021). Approximate analytical and numerical solutions to the damped pendulum oscillator: Newton–Raphson and moving boundary methods. *Journal of Taibah University for Science*, 15(1), 479-485. <https://doi.org/10.1080/16583655.2021.1989739>
- Ganiev, R. F., Ganiev, S. R., Kasilov, V. P., & Pustovgar, A. P. (2015). *Wave technology in mechanical engineering: industrial applications of wave and oscillation phenomena*. John Wiley & Sons.
- Hafez, Y. (2022). Solving the nonlinear pendulum equation with friction and drag forces using the Finite Element Method. *The Romanian Journal of Technical Sciences. Applied Mechanics.*, 67(2), 145-145. <http://rjts-applied-mechanics.ro/index.php/rjts/article/view/344>
- Hauko, R., & Repnik, R. (2019). Damped harmonic oscillation: Linear or quadratic drag force?. *American Journal of Physics*, 87(11), 910-914. <https://doi.org/10.1119/1.5124978>
- Hernández, A. G. (2019, August). Using a large amplitude pendulum in a learning cycle strategy. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1286, No. 1, p. 012036). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1286/1/012036>
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2015). *Fluid mechanics*. Academic press.
- Li, D., Liu, L., & Zhou, S. (2020). Exploration of large pendulum oscillations and damping using a smartphone. *The Physics Teacher*, 58(9), 634-636. <https://doi.org/10.1119/10.0002729>
- Lupi, F., Niemann, H. J., & Höffer, R. (2018). Aerodynamic damping model in vortex-induced vibrations for wind engineering applications. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 174, 281-295. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2018.01.006>
- Rizki, I. A., Citra, N. F., Saphira, H. V., Setyarsih, W., & Putri, N. P. (2021). Eksperimen dan Respon Mahasiswa Terhadap Praktikum Fisika Non-Laboratorium Menggunakan Aplikasi Tracker Video Analysis Untuk Percobaan Kinematika Gerak. *Journal of Teaching and Learning Physics*, 6(2), 77-89. <https://doi.org/10.15575/jotalp.v6i2.12640>
- Sawkmie, I. S., & Mahato, M. C. (2019). Free oscillations of a damped simple pendulum: An analog simulation experiment. *The Physics Educator*, 1(04), 1950015(1)-1950015(10). <https://doi.org/10.1142/S266133951950015X>