

Simulasi Gelombang Interface Menggunakan Skema Staggered Grid

Aulia Oktavia
Politeknik Negeri Padang,

ABSTRAK, Perbedaan salinitas, temperatur, dan tekanan menyebabkan keadaan air laut menjadi terstratifikasi dengan massa jenis yang berbeda. Lapisan fluida dengan massa jenis yang lebih kecil akan berada di atas fluida dengan massa jenis lebih besar. Gelombang interface adalah gelombang yang terjadi pada batas antara dua lapisan air laut dengan massa jenis yang berbeda. Dalam hal ini, persamaan air dangkal dua lapis digunakan untuk mempelajari gelombang interface. Skema staggered grid diterapkan untuk menyelesaikan persamaan air dangkal dua lapis ini. Pertama akan disimulasikan mode barotropic dan baroclinic. Peri-ode dari masing-masing mode ini dihitung dan menunjukkan kesesuaian dengan formula analitik. Selanjutnya skema ini juga digunakan untuk mensimulasikan gelombang panjang interface yang berpropagasi melalui topografi dengan kedalaman yang berbeda (fenomena shoaling), juga masalah dam break yang terjadi pada interface dari dua lapisan fluida.

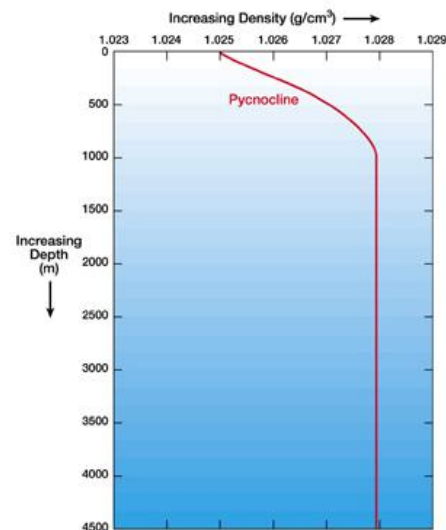
Kata Kunci: gelombang interface, persamaan air dangkal dua lapis, skema staggered grid.

1. PENDAHULUAN

Massa jenis sangat berpengaruh dalam dinamika air laut. Massa jenis air laut yang bergantung terhadap kedalaman, dipengaruhi oleh salinitas, temperatur, dan tekanan. Seperti yang terlihat pada Gambar 1 di bawah, massa jenis air laut tidak konstan. Massa jenis air laut bertambah besar seiring dengan bertambahnya kedalaman. Perbedaan massa jenis ini menyebabkan keadaan air laut menjadi terstratifikasi. Gelombang internal adalah gelombang yang muncul di bawah permukaan air, terjadi karena adanya perbedaan rapat massa pada setiap lapisan air laut. Sedangkan gelombang interface adalah gelombang yang terjadi pada batas antara dua lapisan air laut dengan massa jenis yang berbeda.

Pada kajian ini, air laut dihipotesiskan sebagai model fluida dua lapisan, masing-masing dengan massa jenis konstan, ρ_1 dan ρ_2 . Sedangkan model yang digunakan adalah persamaan air dangkal dua lapis. Persamaan air dangkal (shallow water equation) adalah persamaan yang biasa digunakan untuk mengkaji permasalahan

gelombang panjang pada area dangkal. Persamaan air dangkal berlaku jika $kd_0 \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$, dengan k adalah bilangan gelombang dan d_0 adalah kedalaman air.



Gambar 1. Grafik massa jenis terhadap kedalaman air laut

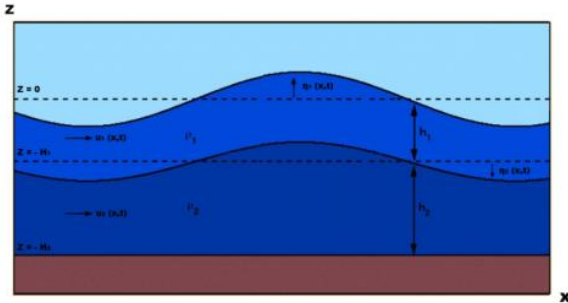
Pada artikel ini, akan diuraikan berbagai simulasi menggunakan persamaan air dangkal dua lapis dengan skema staggered grid. Dengan model fluida dua lapis ini, pertama akan disimulasikan kemunculan dua mode, yaitu mode barotropic dan baroclinic. Pada mode ini dapat dihitung periode gelombang dari masing-masing mode yang kemudian disesuaikan dengan formula analitik.

Hal lain yang dapat disimulasikan menggunakan persamaan air dangkal dua lapis ini adalah peristiwa wave shoaling. Wave shoaling adalah peristiwa bertambahnya amplitudo gelombang seiring berkurangnya kedalaman. Dengan mengetahui besarnya perubahan amplitudo dari gelombang, maka dapat dihitung koefisien shoaling dari gelombang itu. Selain itu, juga disimulasikan masalah dam break yang terjadi pada gelombang interface. Masalah dam break ini akan dibagi menjadi dua kasus, yaitu kasus kering dan kasus basah.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Air Dangkal Dua Lapis

Persamaan ini terdiri dari persamaan konservasi massa dan persamaan momentum.



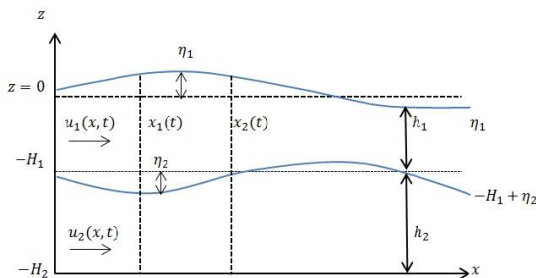
Gambar 2. Sketsa Air Dangkal Dua Lapis

Gambar di atas adalah sketsa dari persamaan air dangkal dua lapis dengan

- η_i : simpangan dari keadaan setimbang pada lapisan ke-i,
- ρ_i : kerapatan atau massa jenis lapisan ke-i,
- u_i : kecepatan horizontal pada lapisan ke-i,
- h_i : ketebalan air pada lapisan ke-i,
- H_i : ketebalan air pada saat setimbang pada lapisan ke-i, $i=1,2$.

Perhatikan fluida lapisan atas pada domain pengamatan seperti pada gambar di bawah, dengan batas bawah $z = -H_1 + \eta_2(x, t)$, batas atas elevasi gelombang $z = \eta_1(x, t)$, batas kiri $x_1(t)$, dan batas kanan $x_2(t)$. Batas kiri dan kanan bergerak mengikuti aliran partikel fluida dengan kecepatan horizontal

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1(x_1, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2(x_2, t). \quad (1)$$



Gambar 3. Domain Pengamatan

Massa fluida pada lapisan atas $M_1(t)$ pada domain $[x_1, x_2]$ didefiniikan sebagai

$$M_1(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho_1 h_1(x, t) dx, \quad (2)$$

dengan $h_1(x, t) = \eta_1(x, t) + H_1 - \eta_2(x, t)$ menyatakan ketebalan fluida apian atas pada

posisi x dan waktu t . Laju perubahan massa fluida pada domain pengamatan diberikan oleh $\frac{dM_1}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho_1 (h_1)_t + \rho_1 (h_1 u_1)_x dx$.

Mengingat tidak ada massa fluida yang ditambahkan ataupun dikurangi, massa fluida pada domain pengamatan adalah tetap atau $\frac{dM_1}{dt} = 0$, akibatnya haruslah persamaan di atas menjadi

$$(h_1)_t + (h_1 u_1)_x = 0. \quad (3)$$

Perlakuan yang sama juga berlaku pada massa fluida lapisan bawah $M_2(t)$ sehingga persamaan konservasi massa untuk fluida lapisan bawah diberikan oleh

$$(h_2)_t + (h_2 u_2)_x = 0. \quad (4)$$

Laju perubahan momentum fluida lapisan atas pada domain $[x_1, x_2]$ diberikan oleh

$$\frac{dI_1}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho_1 (h_1 u_1)_t + \rho_1 (h_1 u_1^2)_x dx. \quad (5)$$

Body force sebanding dengan massa fluida, yang dapat dinyatakan sebagai

$$F_{body} = - \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} (-H_1 + \eta_2)_x \rho_1 g h_1 dx. \quad (6)$$

Body force ini akan bernilai nol jika kasus dasar rata. Total tekanan di sisi x_1 adalah $P_1(x_1, t) = \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2$ dengan $P_{atm} = 0$ dan $h_1(x, t) = \eta_1(x, t) + H_1 - \eta_2(x, t)$. Sehingga

$$P_1(x_1, t) - P_1(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 \right)_x dx.$$

Berdasarkan Hukum II Newton dan berlaku untuk setiap $x_1(t)$ dan $x_2(t)$, maka

$$(u_1)_t + u_1(u_1)_x + g(\eta_1)_x = 0. \quad (7)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh persamaan momentum untuk fluida lapisan bawah sebagai berikut

$$(u_2)_t + u_2(u_2)_x + \frac{\rho_1}{\rho_2} g(\eta_1 - \eta_2)_x + g(\eta_2)_x = 0. \quad (8)$$

Untuk diskusi selanjutnya, suku adveksi pada persamaan momentum diabaikan, sehingga persamaan air dangkal dua lapis yang diperhatikan adalah

$$\begin{aligned} (h_1)_t + (h_1 u_1)_x &= 0. \\ (h_2)_t + (h_2 u_2)_x &= 0. \\ (u_1)_t + g(\eta_1)_x &= 0. \\ (u_2)_t + \frac{\rho_1}{\rho_2} g(\eta_1 - \eta_2)_x + g(\eta_2)_x &= 0. \end{aligned}$$

Barotropic dan Baroclinic

Gelombang permukaan laut yang sering dilihat adalah barotropic dengan amplitudo terbesar terjadi di permukaan. Pada suatu waktu tertentu terjadi keadaan dimana amplitudo terbesar terjadi di interface, yang dinamakan baroclinic.

Perhatikan persamaan yang berlaku pada fluida lapisan atas berikut.

$$(\eta_1 - \eta_2)_t + (h_1 u_1)_x = 0, \quad (u_1)_t + g(\eta_1)_x = 0, \quad (9)$$

$$h_1 = \eta_1 + H_1 - \eta_2.$$

Persamaan konservasi massa di atas dapat ditulis ke dalam bentuk berikut.

$$(\eta_1 - \eta_2)_t + h_1(u_1)_x + (h_1 u_1)_x = 0.$$

Untuk kasus linier, persamaan di atas menjadi

$$(\eta_1 - \eta_2)_t + H_1(u_1)_x = 0. \quad (10)$$

Persamaan di atas diturunkan terhadap waktu dan substitusikan persamaan momentum pada persamaan (9) sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\eta_1 - \eta_2) = gH_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Pada fluida lapisan bawah, persamaan yang dimiliki adalah

$$(\eta_2)_t + (h_2 u_2)_x = 0, \quad (u_2)_t + \frac{\rho_1}{\rho_2} g(\eta_1)_x + g'(\eta_2)_x = 0, \quad h_2 = -H_1 + \eta_2 + H_2, \quad (12)$$

dengan $g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$. Sama halnya dengan fluida lapisan atas, untuk kasus linier, persamaan di atas menjadi

$$(\eta_2)_t + H(u_2)_x = 0, \quad H = H_2 - H_1 \quad (13)$$

Persamaan di atas diturunkan terhadap waktu dan substitusikan persamaan momentum pada persamaan (12) sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta_2 = H \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g\eta_1 - g'\eta_1 + g'\eta_2). \quad (14)$$

Dengan memisalkan $\eta_2(x, t) = \mu\eta_1(x, t)$, maka persamaan (11) dan (14) dapat diubah menjadi

$$\frac{gH_1}{1-\mu} = \frac{H}{\mu} (g - g'(1 - \mu)) = c_e^2. \quad (15)$$

Dari persamaan di atas, ingin didapat dua nilai c_e , yaitu c_e untuk barotropic dan c_e untuk baroclinic. Dalam satu waktu hanya satu mode yang terjadi pada osilasi. Struktur dari mode ini dipelajari melalui kajian berikut. Kuadratkan persamaan (15), sehingga dapat ditulis dalam bentuk alternatif

$$c_e^4 - gH_2 c_e^2 + gg'H_1 H = 0. \quad (16)$$

Dengan mendefinisikan kedalaman ekuivalen H_e dengan $c_e^2 = gH_e$, diperoleh dua nilai c_e . Solusi pertama diberikan oleh

$$c_o^2 = gH_{e1} \approx gH_2 \left(1 - \frac{g'H_1 H}{gH_2^2}\right). \quad (17)$$

Sehingga diperoleh hubungan

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{H_2}{H}, \quad \frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{g'H_1}{gH_2}. \quad (18)$$

Solusi pertama ini dinamakan solusi barotropic atau mode barotropic. Pada mode barotropic ini, gelombang permukaan dan gelombang interface bergerak sefase dengan kecepatan dan periodenya diberikan oleh

$$c_o^2 = gH_2, \quad T_{eks} = \frac{2L}{n\sqrt{gH_2}}. \quad (19)$$

Dengan demikian, mode barotropic ini berkelakuan seperti gelombang gravitasi air dangkal biasa. Sedangkan solusi kedua diberikan oleh

$$c_1^2 = gH_{e2} \approx \frac{g'H_1 H}{H_2} \left(1 + \frac{g'H_1 H}{H_2^2}\right), \quad (20)$$

Dan diperoleh hubungan

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} \approx -\frac{g'H}{gH_2}, \quad \frac{u_1}{u_2} \approx -\frac{H}{H_1}. \quad (21)$$

Solusi ini dinamakan solusi baroclinic atau mode baroclinic. Pada mode ini, gelombang permukaan dan gelombang interface bergerak dengan fase yang berlawanan. Kecepatan dan periode gelombang pada mode baroclinic ini adalah

$$c_1^2 = \frac{g'H_1 H}{H_2}, \quad T_{int} = \frac{2L}{n\sqrt{g'\frac{H_1 H}{H_2}}}, \quad (22)$$

dimana $g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}$ adalah *reduced* gravitasi (yang nilainya selalu lebih kurang dari g). Pada mode ini, amplitudo gelombang permukaan lebih kecil dibandingkan gelombang interface.

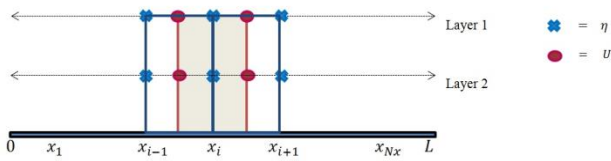
3. PEMBAHASAN

Model Diskrit Persamaan Air Dangkal Dua Lapis

Perhatikan persamaan air dangkal dua lapis setengah linier berikut dengan domain keberlakuan $[0, L]$.

$$(\eta_1 - \eta_2)_t + (h_1 u_1)_x = 0, \quad (\eta_2)_t + (h_2 u_2)_x = 0, \quad (u_1)_t + g(\eta_1)_x = 0, \quad (u_2)_t + \frac{\rho_1}{\rho_2} g(\eta_1 - \eta_2)_x + g(\eta_2)_x = 0.$$

Domain $[0,L]$ dipartisi menjadi beberapa bagian dengan menggunakan partisi *staggered grid*, $0 = x_{\frac{1}{2}}, x_1, \dots, x_{i-\frac{1}{2}}, x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{N_x}, x_{N_x+\frac{1}{2}} = L$.



Gambar 4, Domain $[0,L]$ yang dipartisi secara *staggered*.

Diskritisasi untuk persamaan konservasi massa kasus 1-dimensi 1D pada sel ke- j .

$$\frac{\eta_{1,j}^{n+1} - \eta_{1,j}^n}{\Delta t} - \frac{\eta_{2,j}^{n+1} - \eta_{2,j}^n}{\Delta t} + \frac{q_{1,j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{1,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\eta_{2,j}^{n+1} - \eta_{2,j}^n}{\Delta t} + \frac{q_{2,j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{2,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \tag{23}$$

dengan

$$q_{i,j+\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}} * h_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad i = 1,2 \tag{24}$$

yang menyatakan pendekatan orde pertama dari flux massa pada titik $x_{j+\frac{1}{2}}$. Pada persamaan (24), nilai h dinyatakan dengan * karena pada titik $j + \frac{1}{2}$ tidak ada nilai h .

Diskritisasi untuk persamaan konservasi momentum pada sel ke- $j + \frac{1}{2}$.

$$\frac{u_{1,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{1,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + g \frac{\eta_{1,j}^{n+1} - \eta_{1,j-1}^{n-1}}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{u_{2,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{2,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + g \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\eta_{1,j}^{n+1} - \eta_{1,j-1}^{n-1}}{\Delta x} - \frac{\eta_{2,j}^{n+1} - \eta_{2,j-1}^{n-1}}{\Delta x} \right) + g \frac{\eta_{2,j}^{n+1} - \eta_{2,j-1}^{n-1}}{\Delta x} = 0. \tag{25}$$

Diskritisasi η pada konservasi momentum di atas dihitung pada saat t_{n+1} agar skema diskritisasi tersebut stabil.

Simulasi Barotropic dan Baroclinic

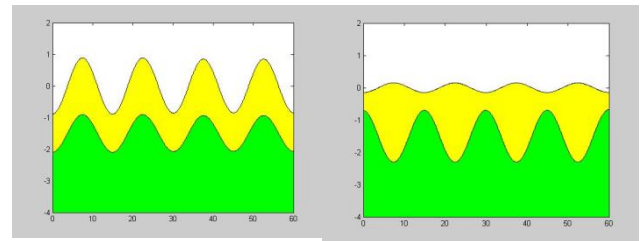
Pada bagian ini akan disimulasikan mode barotropic dan baroclinic menggunakan persamaan air dangkal dua lapis linier. Berdasarkan kondisi yang harus dipenuhi untuk barotropic (18), nilai awal yang digunakan adalah

$$\eta_1(x, 0) = \cos\left(\frac{8\pi x}{L}\right), \eta_2(x, 0) = \frac{H}{H_2} \eta_1(x, 0). \tag{26}$$

Sedangkan untuk menghasilkan kondisi baroclinic (19), nilai awal yang digunakan adalah

$$\eta_2(x, 0) = \cos\left(\frac{8\pi x}{L}\right), \eta_1(x, 0) = \frac{g'H}{gH_2} \eta_2(x, 0), \tag{27}$$

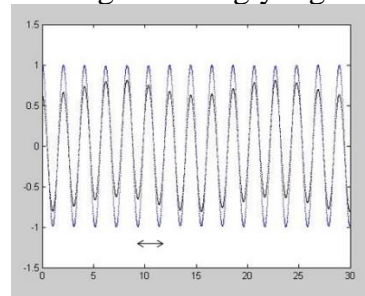
dengan $g' = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$. Kedua simulasi ini menggunakan *hard wall* sebagai batas kiri dan kanan dimana $u_1(0, x) = u_1(L, x) = 0$ dan $u_2(0, x) = u_2(L, x) = 0$. Domain perhitungan dari simulasi ini adalah $\{(x, t) | 0 < x < L, 0 < t < T\}$ dengan lebar selang partisi $\Delta x = 0,1$. Kecepatan horizontal pada saat awal dari masing-masing fluida, yaitu $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0$. Adapun parameter yang digunakan adalah $g = 9.81, H = 2.5, H_2 = 4, \rho_1 = 1000$, dan $\rho_2 = 1100$.



Gambar 5. Simulasi kasus barotropic (kiri) dan baroclinic (kanan) dengan $\rho_1 = 1000, \rho_2 = 1100$

Dari gambar di atas terlihat bahwa pada mode barotropic, gelombang permukaan dan gelombang interface bergerak sefase. Kecepatan fluida di kedua lapisan memiliki tanda yang sama. Sedangkan pada mode baroclinic, gelombang permukaan dan gelombang interface bergerak dalam fase yang berlawanan serta kecepatan fluida dari masing-masing gelombang memiliki tanda yang berlawanan.

Perbedaan massa jenis yang terlalu signifikan berpengaruh terhadap amplitudo gelombang. Semakin besar perbedaannya semakin besar juga amplitudo gelombang yang dihasilkan.



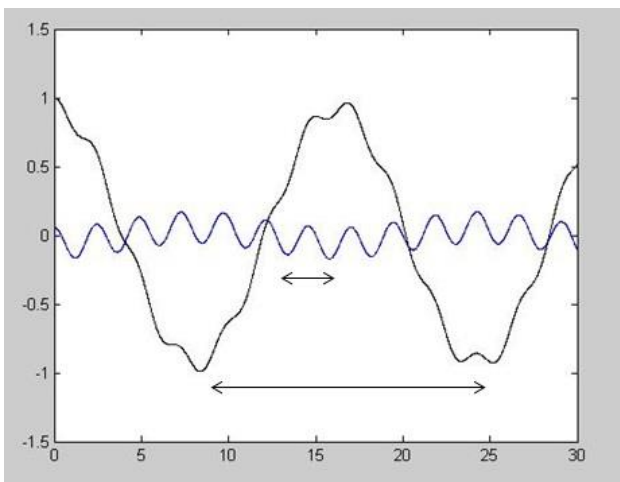
Gambar 6. Deret waktu dari $\eta_1(0, t)$ dan $\eta_2(0, t)$ pada mode barotropic

Secara numerik (dari Gambar 6) diperoleh bahwa periode dari mode barotropic sebesar 2,051 detik. Hasil ini dapat disesuaikan dengan hasil analitik (berdasarkan persamaan (19), yaitu

$$T_{eks} = \frac{2L}{n\sqrt{gH_2}} = 2.3946 \text{ detik.}$$

Adapun periode dari mode baroclinic, dalam hal ini periode dari gelombang interface, terhitung sebesar 16,655 detik. Dari hasil perhitungan analitik diperoleh

$$T_{int} = \frac{2L}{n\sqrt{g\frac{H_1H}{H_2}}} = 16.4047 \text{ detik.}$$

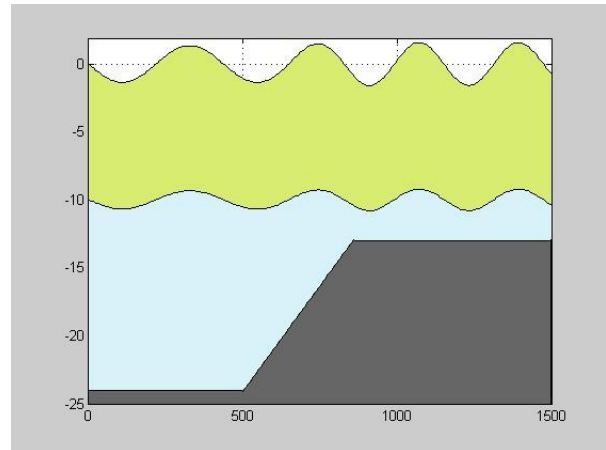


Gambar 7. Deret waktu dari $\eta_1(0, t)$ dan $\eta_2(0, t)$ pada mode baroclinic

Dari hasil perhitungan periode di atas terlihat bahwa periode mode baroclinic lebih besar dibanding periode barotropic. Sehingga dapat disimpulkan bahwa mode baroclinic lebih lambat dibandingkan mode barotropic.

Simulasi Wave Shoaling

Gelombang sinusoidal masuk dari batan kiri dengan $\eta_1(0, x) = 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{10}\right), \eta_2(0, x) = \frac{H}{H_2}\eta_1(0, x)$. Syarat batas kanan yang digunakan adalah syarat batas serap dimana gelombang akan menembus batas kanan. Hal ini bersesuaian dengan gelombang laut yang lama kelamaan akan menghilang akibat adanya pantai yang menyerap gelombang. Adapun parameter yang digunakan adalah $g = 10, \rho_1 = 1025$, dan $\rho_2 = 1026$.



Gambar 8. Wave shoaling pada fluida dua lapis

Dari aspek kualitatif terlihat bahwa amplitude gelombang permukaan bertambah dan panjang gelombang berkurang seiring berkurangnya kedalaman fluida. Hal yang sama juga terjadi pada gelombang interface meskipun pertambahan amplitudonya tidak terlalu signifikan. Rumus analitik dari perbandingan amplitude gelombang dengan kedalaman yang berbeda [3] adalah

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{\sqrt{gd_1}}{\sqrt{gd_2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Dari Gambar 8 diperoleh hasil numerik untuk $d_1 = 24, d_2 = 13, A_1 = 1.3478, A_2 = 1.5685$, sehingga $\frac{A_2}{A_1} = 1.1637$. Sedangkan koefisien *wave shoaling* secara analitik adalah

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.1656.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa perhitungan numerik menghasilkan koefisien *wave shoaling* yang nilainya mendekati koefisien *wave shoaling* dari perhitungan analitik.

Tabel 1 menunjukkan bahwa hasil koefisien *wave shoaling* (K_s) secara numerik cukup sesuai dengan hasil analitik. K_s semakin besar maka tinggi gelombang juga bertambah. Untuk kasus nonlinier, K_s yang diperoleh secara numerik sangat berbeda dengan hasil analitik. Hal ini disebabkan karena adanya efek dari suku nonlinier pada persamaan tersebut.

Tabel 1. Koefisien *wave shoaling* untuk $\rho_1 = 1025$ dan $\rho_2 = 1026$

d_1	d_2	K_s Analitik	K_s Numerik
24	13	1.1656	1.1637
24	12	1.1892	1.1982
24	11	1.2153	1.2257
29	13	1.2221	1.2103
29	12	1.2468	1.2295
29	11	1.2742	1.2768

- [6] Zijlema, M. 2011-2012. *Computational Modelling of Flow and Transport*. Delft University of Technology.

4. KESIMPULAN

Skema staggered grid telah berhasil diterapkan untuk mensimulasikan gelombang interface dalam persamaan air dangkal dua lapis. Skema ini diterapkan pada berbagai kasus diantaranya pada simulasi barotropic dan baroclinic dan simulasi wave shoaling. Pada simulasi mode barotropic dan baroclinic, skema ini menunjukkan ke-sesuaian dengan hasil analitik, yaitu pada perhitungan periode pada masing-masing mode. Hasil yang sama juga diperoleh dari simulasi wave shoaling dalam perhitungan koefisien shoaling. Koefisien shoaling yang diperoleh dari hasil perhitungan numerik mendekati hasil perhitungan analitik. Dengan demikian, skema ini dapat digunakan untuk mensimulasikan berbagai jenis aliran.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Dean, R. G, and Darlymple, R. A. 2000. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientist*. World Scientific.
- [2] Gill, Adrian E. 1982. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. University of Cambridge, England.
- [3] Holthuijen, Leo H. 2007. *Waves in Ocean and Coastal Waters*. Cambridge University Press.
- [4] Kampf, Jochen. 2009. *Ocean Modelling for Beginners*. Springer.
- [5] Stelling, G.S. and Zijlema, M. 2003. *An Accurate and Efficient Finite-Difference Algorithm for Non-Hydrostatic Free Surface Flow with Application to Wave Propagation*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1-23.