

Penggunaan dan Pengembangan Model Epidemologi SIR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Sulawesi Selatan

M. Rais Ridwan,
STKIP YPUP Makassar, mraisridwan@yahoo.com

Abdul Hadi
STKIP YPUP Makassar, abdulhadi30786@gmail.com

ABSTRAK. Penelitian ini menggunakan analisis data deskriptif sebagai tahap awal yang berdasarkan data jumlah penduduk Sulawesi Selatan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis tahun 2016 dan 2017. Tahap kedua, menentukan asumsi-asumsi sehingga dibentuk model penyebaran penyakit Tuberkulosis, yakni model epidemologi SIR dengan titik ekuilibrium $(S, I) = (1563, 172072437)$. Tahap ketiga, menentukan nilai eigen matriks Jacobi diperoleh di titik (S, I) dengan sifat kestabilan, stabil asimtotik dengan nilai – nilai eigen $\lambda_1 = -0,05$ dan $\lambda_2 = -5506,27$. Selanjutnya, diperoleh bilangan reproduksi dasar, yakni $R_0 = 275,404$, yang menunjukkan bahwa satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 275 hingga 276 jiwa individu rentan terhadap penyakit Tuberkulosis. Tahap terakhir, berdasarkan data hasil penularan tersebut menunjukkan bahwa penyakit Tuberkulosis di Sulawesi Selatan akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun akan datang. Interpretasi berdasarkan simulasi numerik menggunakan software Maple dan Matlab juga menunjukkan bersifat endemik dengan melihat perilaku solusi penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk kurun waktu t yang relatif lama.

Kata Kunci: Model Penyakit Tuberkulosis (SIR), Titik Ekuilibrium, Kestabilan Titik Ekuilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar, Simulasi Numerik

1. PENDAHULUAN

Tuberkulosis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh infeksi bakteri *Mycobacterium tuberculosis*. Tuberkulosis Paru merupakan air *born disease* yaitu udara sangat berperan penting dalam proses penularan. Penyakit kronik ini dapat menular ketika percikan dahak (droplet) seseorang penderita TB Paru BTA Positif berada di udara dan dihirup oleh orang lain. Ketika kualitas udara dalam ruangan tersebut tidak baik maka kemungkinan *Mycobacterium tuberculosis* akan bertahan hidup di udara. Hal ini erat kaitannya dengan lingkungan rumah dan pencemaran udara di dalam rumah. Rumah dengan kondisi udara tertutup dan tanpa ventilasi

akan menghalangi cahaya masuk ke dalam rumah sehingga berkontribusi positif terhadap peningkatan kejadian penyakit di lingkungan rumah tersebut.

Prevalensi TB Paru di Sulawesi Selatan mengalami peningkatan kasus pada tahun 2007 dan 2013 dengan persentase 0,3%. Walaupun masih berada di bawah persentase nasional (0,4%), namun masih dianggap perlu adanya penanggulangan terhadap penambahan kasus setiap tahun (Balitbangkes, 2013). Hal ini dapat ditunjukkan dengan jumlah penderita TB Paru BTA Positif di Sulawesi Selatan pada tahun 2014 masih tinggi yaitu 8.859 kasus. Berdasarkan seluruh kabupaten atau kota se-Sulawesi Selatan, Kota Makassar menduduki peringkat pertama dengan jumlah penderita TB Paru BTA Positif sebanyak 1.866 kasus, menyusul Kabupaten Gowa sebanyak 722 kasus dan Kabupaten Bone sebanyak 587 kasus (Dinkes Provinsi Sulsel, 2014).

Perkembangan di bidang ilmu matematika memiliki peranan untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit Tuberkulosis untuk waktu tertentu yang akan datang. Penyakit tuberkulosis tersebut dapat dimodelkan dengan menggunakan model epidemiologi yakni dalam bentuk model epidemologi SIR. Model epidemologi SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) merupakan model epidemologi dimana setiap individu rentan terinfeksi penyakit, dinotasikan dengan S (*susceptibles*), individu yang rentan terinfeksi kemudian berinteraksi dengan individu yang terinfeksi, dan akhirnya terinfeksi. Individu terinfeksi tersebut dinotasikan dengan I (*infected*). Kemudian dengan pengobatan medis, individu yang terinfeksi mungkin sembuh, yang dinotasikan dengan R (*removed*). Dalam hal ini, kelompok individu yang telah sembuh tidak kebal terhadap penyakit sehingga dapat kembali ke kelas individu yang rentan. Model epidemologi SIR

tersebut kemudian dituliskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial dan lebih lanjut diselidiki perilaku dinamikanya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear berikut.

$$\dot{x} = f(x) \quad (0.1)$$

dengan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dan E suatu himpunan terbuka di \mathbb{R}^n .

Keuilibrium dan Kriteria Kestabilan Keuilibrium

Diberikan definisi titik keuilibrium dan juga kriteria kestabilan titik keuilibrium Sistem (0.1).

Definisi 2.1. (Lynch, 2010) Suatu titik disebut titik keuilibrium Sistem (0.1) jika memenuhi $f(\hat{x}) = 0$.

Definisi 2.2. (Lynch, 2010) Diberikan Sistem (0.1) dan \hat{x} adalah titik keuilibriumnya.

- (i) Titik \hat{x} dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ dengan sifat $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \hat{x}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq t_0$.
- (ii) Titik \hat{x} dikatakan stabil asimtotik jika \hat{x} stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ dengan sifat $\|x(t_0) - \hat{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}\| = 0$.
- (iii) Titik \hat{x} dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (i).

Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear dan Kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Linear

Diberikan definisi linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinear (0.1) dan kestabilan Sistem Persamaan Diferensial Linear.

Definisi 2.3. (Hubbard dan West, 1995) Diberikan Sistem (0.1) terdiferensial dan kontinu pada sub himpunan buka $E \subset \mathbb{R}^n$ dan \hat{x} keuilibrium dari sistem tersebut. Linearisasi Sistem (0.1) di titik \hat{x} adalah persamaan differensial linear

$$\dot{\xi} = A\xi$$

dengan $\xi = x - \hat{x}$ dan

$$A = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\hat{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\hat{x}} \\ \vdots & & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\hat{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\hat{x}} \end{bmatrix}. \quad (0.2)$$

Kemudian, matriks A dinamakan matriks Jacobian fungsi f dari Sistem (0.1) di titik \hat{x} .

Definisi 2.4. (Perko, 1991) Diberikan matriks Jacobian (0.2). Sistem linear $\dot{x} = Ax$ disebut linearisasi Sistem (0.1) disekitar titik keuilibrium \hat{x} .

Definisi 2.5. (Lynch, 2010) Suatu titik keuilibrium \hat{x} disebut hiperbolik jika bagian real dari nilai eigen matriks Jacobian (0.2) tidak nol. Jika bagian real dari salah satu nilai eigen matriks Jacobian (0.2) sama dengan nol maka titik keuilibrium \hat{x} disebut nonhiperbolik.

Teorema 2.6. (Hahn, 1976) Diberikan matriks Jacobian A dari Sistem non linear (0.1).

- (i) Jika bagian real semua nilai eigen λ dari matriks A bernilai negatif, maka titik keuilibrium \hat{x} stabil asimtotik.
- (ii) Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen λ matriks A yang bagian realnya positif, maka titik keuilibrium \hat{x} tidak stabil.

Teorema 2.7. (Perko, 1991) Misalkan $\delta = \det A$ dan $\tau = \text{trace } A$. Diberikan sistem linear

$$\dot{x} = Ax \quad (0.3)$$

- (i) Jika $\delta < 0$ maka Sistem (0.3) mempunyai suatu sadel di titik asal.
- (ii) Jika $\delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ maka Sistem (0.3) mempunyai suatu node di titik asal; node stabil jika $\tau < 0$ dan node tidak stabil jika $\tau > 0$.
- (iii) Jika $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, dan $\tau \neq 0$ maka Sistem (0.3) mempunyai suatu focus di titik asal; focus stabil apabila $\tau < 0$ dan focus tidak stabil apabila $\tau > 0$.
- (iv) Jika $\delta > 0$ dan $\tau = 0$ maka Sistem (0.3) mempunyai suatu center di titik asal.

2.4. Himpunan Invarian

Definisi 2.8. (Khalil, 2002) Suatu himpunan M disebut himpunan Invarian terhadap Sistem (0.1),

jika untuk setiap syarat awal $x(0) \in M$, maka $x(t, x(0)) \in M$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

3. METODOLOGI

Tahapan Penelitian

Adapun tahapan atau prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

- (a) Melakukan pengambilan data di Dinas Kesehatan dan Badan Pusat Provinsi Sulawesi Selatan;
- (b) Melakukan analisis deskriptif data sebagai gambaran awal penyebaran penyakit Tuberkulosis di Sulawesi Selatan tahun 2016 dan 2017;
- (c) Membuat asumsi berdasarkan data-data yang diperoleh dan memodelkan penyebaran penyakit Tuberkulosis tersebut ke bentuk sistem persamaan diferensial
- (d) Melakukan analisis titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium model epidemii SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis
- (e) Mengaplikasikan model epidemii SIR dengan menginterpretasi kestabilan titik ekuilibrium dengan mengidentifikasi penyebaran penyakit Tuberkulosis dalam kurun waktu tertentu.

Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari dinas Kesehatan dan Badan Pusat Statistika Provinsi Sulawesi Selatan. Data yang digunakan merupakan data tahun 2016 dan 2017.

Variabel Penelitian

Variabel dalam penelitian ini adalah jumlah individu yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis (S), jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis (I), dan jumlah individu yang sembuh dari penyakit Tuberkulosis (R). Adapun parameter dalam penelitian ini adalah laju kelahiran atau migrasi (A), laju penularan penyakit (α), dan juga laju kesembuhan individu (β) serta laju kematian karena penyakit Tuberkulosis (δ).

4. PEMBAHASAN

Analisis Data Deskriptif Model Epidemii Tuberkulosis

Data jumlah penderita Tuberkulosis dan data jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2016 dan 2017 sebagai analisis awal untuk menentukan parameter model epidemii Tuberkulosis. Berikut diberikan data jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan.

Tabel 1. Jumlah Penduduk Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2016 dan 2017

Tahun	Jumlah Penduduk (Jiwa)		Total
	Laki-laki	Perempuan	
2016	4204110	4402265	8606375
2017	4752838	4769665	9522503

Tabel 1. di atas menunjukkan jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2016 sebanyak 8606375 jiwa, ditulis $N = 8606375$ dengan asumsi jumlah penduduk awal yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis sebanyak 8606375, ditulis $S(0) = S(2016) = 8606375$. Kemudian jumlah penduduk pada tahun 2016 sebanyak 8606375 jiwa dengan asumsi jumlah penduduk setelah 1 tahun yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis sebesar 9522503, ditulis $S(2017) = 9522503$.

Kemudian, data jumlah penderita Tuberkulosis di Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2016 dan 2017 diberikan dalam tabel 2 berikut.

Tabel 2. Jumlah Penderita Tuberkulosis Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2016 dan 2017

Tahun	Jumlah Kasus yang ditemukan (Jiwa)		
	Terinfeksi	Sembuh	Meninggal (Penyakit)
2016	43303	6198	329
2017	66035	4124	309

Tabel 2. di atas menunjukkan jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan terinfeksi penyakit Tuberkulosis pada tahun 2016 sebanyak 43303 jiwa, ditulis $I(t) = 43303$ dengan asumsi jumlah penduduk awal yang terinfeksi

penyakit Tuberkulosis sebanyak 43303, ditulis $I(0) = I(2016) = 43303$. Sedangkan jumlah penduduk yang terinfeksi pada tahun 2017 sebanyak 66035 jiwa dengan asumsi jumlah penduduk setelah 1 tahun yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis sebesar 66035, ditulis $I(2017) = 66035$.

Selanjutnya, untuk jumlah penduduk Provinsi Sulawesi Selatan yang sembuh terhadap penyakit Tuberkulosis pada tahun 2016 sebanyak 329 jiwa, ditulis $R(2016) = 329$ dengan asumsi jumlah penduduk awal yang sembuh terhadap penyakit Tuberkulosis sebanyak 329, ditulis $R(0) = R(2016) = 329$. Sedangkan jumlah penduduk yang sembuh pada tahun 2017 sebanyak 309 jiwa, ditulis $R(2017) = 309$.

Asumsi dan Parameter Model Epidemi Tuberkulosis

Analisis data deskriptif yang diperoleh dari data Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan menunjukkan bahwa jumlah penduduk Sulawesi Selatan yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis mulai tahun 2016 dan 2017 sedangkan data Badan Pusat Statistik Provinsi Sulawesi Selatan menunjukkan bahwa data jumlah penduduk Sulawesi Selatan tahun 2016 dan 2017. Kemudian berdasarkan data – data tersebut dibentuk asumsi – asumsi sebagai berikut.

1. Dalam populasi terjadi kelahiran dan migrasi dimana data jumlah penduduk awal Provinsi Sulawesi Selatan rentan terinfeksi penyakit Tuberkulosis,
2. Penyakit yang dibicarakan dalam penelitian ini penyakit menular,
3. Individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis mengalami kesembuhan dan mengalami kematian karena penyakit Tuberkulosis.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dibentuk model epidemi Tuberkulosis, yakni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + \delta)I, \end{cases} \quad (0.8)$$

dengan variabel S menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis dan I menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis. Kemudian untuk A

menyatakan laju kelahiran atau migrasi, α menyatakan laju penularan penyakit Tuberkulosis dan β serta δ masing-masing menyatakan laju kesembuhan dan laju kematian karena penyakit Tuberkulosis.

Selanjutnya, berdasarkan data variabel yang menyatakan jumlah penduduk awal Provinsi Sulawesi Selatan dan jumlah penduduk yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis, masing-masing yakni

$$S(0) = S(2016) = 8606375 \quad \text{dan}$$

$S(2017) = 9522503$ serta data variabel jumlah penduduk yang sembuh terhadap penyakit Tuberkulosis, yakni $R(2017) = 309$ masing-masing disubstitusikan ke dalam bentuk solusi khusus dari subpopulasi jumlah individu yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis, yakni S sehingga

$$S(t) = S(0)e^{\left(\frac{\alpha}{\beta + \delta}\right)R(t)},$$

dengan $S(t)$ menyatakan jumlah penduduk yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis dan $S(0)$ menyatakan jumlah penduduk awal serta $R(t)$ menyatakan jumlah penduduk yang terinfeksi terhadap penyakit Tuberkulosis diperoleh

$$\frac{\alpha}{\beta + \delta} = 3,2 \times 10^{-4}.$$

dengan laju penularan penyakit Tuberkulosis dari individu rentan menjadi terinfeksi sebesar $\alpha = 3,2 \times 10^{-5}$ dengan asumsi laju kesembuhan dan kematian karena penyakit Tuberkulosis dalam 20 tahun sebesar $\beta = \delta = \frac{1}{20}$ diperoleh $\beta = 20^{-1} = 0,05$. Akibatnya, diperoleh model epidemi penyakit Tuberkulosis dengan asumsi individu yang terinfeksi tidak sembuh terhadap penyakit yang dibicarakan, yakni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 8606375 - 3,2 \times 10^{-5} S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = 3,2 \times 10^{-5} S(t)I(t) - 0,05I(t) \end{cases} \quad (0.9)$$

Titik Ekuilibrium Model Epidemi Tuberkulosis

Diketahui Sistem (0.9) di atas, kemudian ditentukan titik ekuilibrium dengan memisalkan $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$ sehingga

$$\begin{cases} 8606375 - 3,2 \times 10^{-5} SI = 0 \\ 3,2 \times 10^{-5} SI - 0,05I = 0 \end{cases} \quad (0.10)$$

Jika persamaan (2) pada sistem persamaan (0.10) dimisalkan $I \neq 0$, maka $3,2 \times 10^{-5} S - 0,05 = 0$ diperoleh $S = 1563$. Selanjutnya, untuk $S = 1563$ disubstitusikan ke Persamaan (1) diperoleh $I = 172072437$. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium Sistem Persamaan (0.9), yakni $(S, I) = (1563, 172072437)$ yang menyatakan bahwa jumlah individu yang rentan dan terinfeksi terhadap penyakit Tuberkulosis masing-masing adalah 1563 jiwa dan 172072437 jiwa.

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Epidemii HIV/AIDS

Diketahui titik ekuilibrium model penyebaran penyakit Tuberkulosis dalam Sistem Persamaan (0.9), yakni $(S, I) = (1563, 172072437)$. Kemudian ditentukan kestabilan Sistem (0.9) di titik ekuilibrium tersebut. Dimisalkan $\frac{dS}{dt} = f_1(S, I)$ dan $\frac{dI}{dt} = f_2(S, I)$ sehingga

$$\begin{cases} f_1(S, I) = 8606375 - 3,2 \times 10^{-5} SI \\ f_2(S, I) = 3,2 \times 10^{-5} SI - 0,05I, \end{cases} \quad (0.11)$$

diperoleh linearisasi Sistem Persamaan (0.11), yakni dalam bentuk matriks Jacobian, yakni.

$$Jf(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{df_1(S, I)}{dS} & \frac{df_1(S, I)}{dI} \\ \frac{df_2(S, I)}{dS} & \frac{df_2(S, I)}{dI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,2 \times 10^{-5} I & -3,2 \times 10^{-5} S \\ 3,2 \times 10^{-5} I & 3,2 \times 10^{-5} S - 0,05 \end{pmatrix} \quad (0.12)$$

Kemudian berdasarkan (0.12) diperoleh matriks Jacobian di titik ekuilibrium $(S, I) = (1563, 172072437)$, yakni

$$Jf(1563, 172072437) = \begin{pmatrix} -5506,32 & -0,05 \\ 5506,32 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.13)$$

Selanjutnya, berdasarkan matriks Jacobian (0.13) diperoleh persamaan karakteristik, yakni

$$\lambda^2 + 5506,32\lambda + 275,32 = 0$$

diperoleh nilai eigen, yakni $\lambda_1 = -0,05$ dan $\lambda_2 = -5506,27$ dengan $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ sehingga diperoleh titik ekuilibrium $(S, I) = (1563, 172072437)$ stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan untuk jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu populasi menuju ke titik ekuilibrium $(S, I) = (1563, 172072437)$ yang berarti penyakit Tuberkulosis tetap ada dalam populasi yang dibicarakan.

Bilangan Reproduksi Dasar

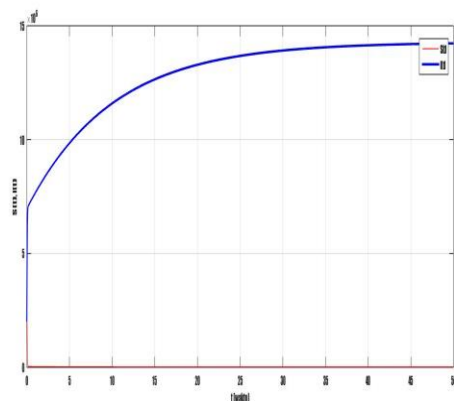
Sistem persamaan (0.9) di atas mempunyai titik ekuilibrium, yakni $(S, I) = (\frac{\beta+\delta}{\alpha}, \frac{A}{\beta+\delta})$. Kemudian, αA merupakan bilangan reproduksi dasar yang dipengaruhi oleh laju kelahiran atau migrasi dan laju penularan penyakit Tuberkulosis sehingga

$$R_0 = \alpha A = (3,2 \times 10^{-5}) 8606375 = 275,404,$$

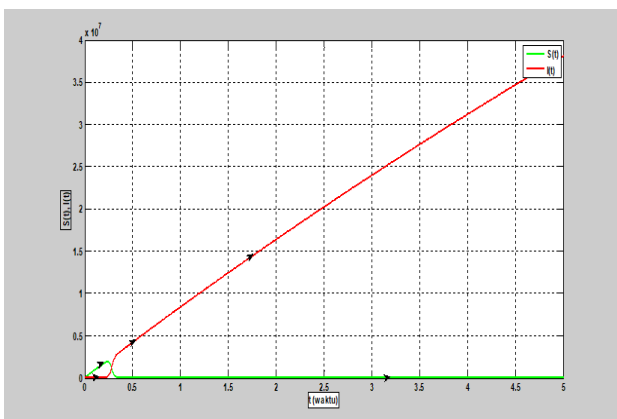
yang menunjukkan satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 275 hingga 276 jiwa individu rentan dalam populasi penyakit Tuberkulosis.

Simulasi Numerik

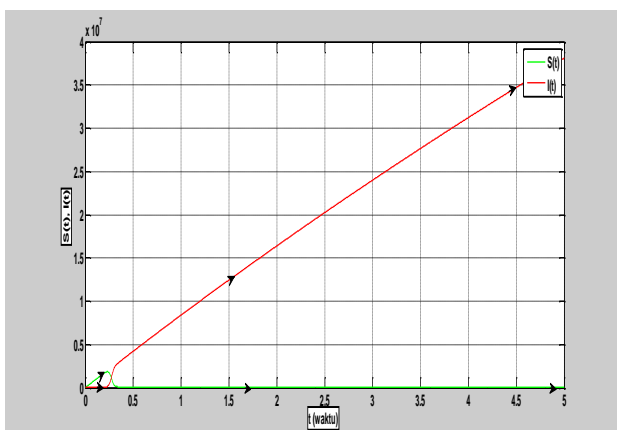
Diberikan simulasi numerik Sistem Persamaan (0.9) yang menunjukkan ilustrasi perilaku kelas individu yang terinfeksi atau terjangkit penyakit dengan kelas individu yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis dalam ukuran jumlah tahun 2016 dan 2017. Parameter yang digunakan adalah A menyatakan rata-rata jumlah individu yang lahir dan imigrasi, dimana



jumlah penduduk Sulawesi Selatan pada tahun 2016. Kemudian, parameter α menyatakan rata-rata jumlah kontak yang menyebabkan individu rentan menjadi terinfeksi setelah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi sedangkan β dan δ masing-masing menyatakan rata-rata jumlah penduduk yang sembuh dan rata-rata jumlah penduduk yang meninggal karena penyakit Tuberkulosis. Berikut diberikan simulasi numerik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ yang menyatakan jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis pada saat t .

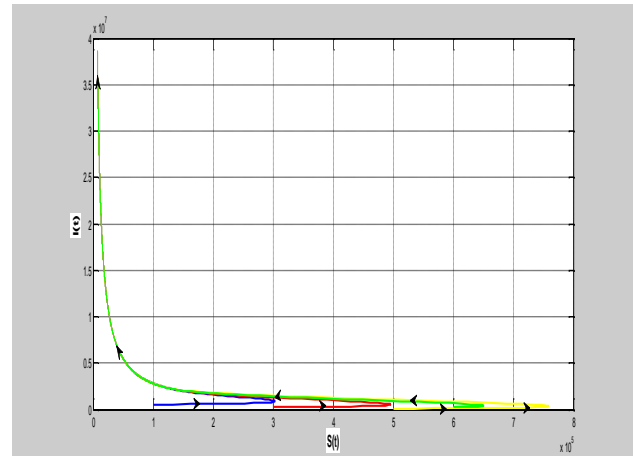


Gambar 1. Grafik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk $0 \leq t \leq 50$



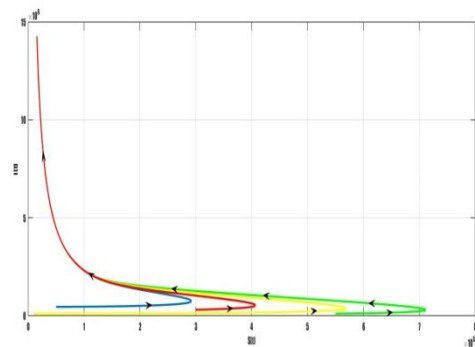
Gambar 1. di atas menunjukkan bahwa pada waktu $0 \leq t \leq 50$ tahun, jumlah individu yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis semakin berkurang sedangkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis mengalami peningkatan jumlah yang signifikan seiring berjalannya waktu. Berikut diberikan ilustrasi perkembangan jumlah individu yang

rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis untuk waktu 100 tahun.



Gambar 2 Grafik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk $0 \leq t \leq 100$

Gambar 2. di atas mengilustrasikan bahwa pada waktu $0 \leq t \leq 100$ tahun, jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis tidak mengalami perubahan peningkatan jumlah yang signifikan seiring berjalannya waktu. Dalam kondisi ini disebut dengan kondisi stabil dari sistem di titik ekuilibrium $(S, I) = (1.563, 1.72072437)$. Dengan demikian, penyakit Tuberkulosis di Provinsi Sulawesi Selatan akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun ke depan. Berikut diberikan ilustrasi jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi dalam bidang fase.



Gambar 3. Potret fase pada bidang $S(t)$ dan $I(t)$ Sistem (0.9)

Berdasarkan Gambar 4.3 di atas terlihat bahwa untuk setiap trayektori penyelesaian $S(t)$ dan

$I(t)$ dengan nilai awal
 $(S_0, I_0) = (100000, 550000)$,
 $(S_0, I_0) = (300000, 250000)$ dan
 $(S_0, I_0) = (600000, 250000)$, serta
 $(S_0, I_0) = (500000, 100000)$ akan menuju ke titik
 $(1563, 172072437)$ yang berarti populasi
bersifat endemik dimana selalu ada individu
yang terjangkit penyakit Tuberkulosis untuk
kurun waktu 100 tahun.

5. KESIMPULAN

1. Berdasarkan analisis data deskriptif jumlah penduduk Sulawesi Selatan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis tahun 2016 dan 2017 diperoleh bahwa Asumsi – asumsi dalam penelitian ini adalah
 - a. Dalam populasi terjadi kelahiran dan migrasi dimana data jumlah penduduk awal Provinsi Sulawesi Selatan rentan terinfeksi penyakit Tuberkulosis
 - b. Penyakit yang dibicarakan dalam penelitian ini penyakit menular
 - c. Individu yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis mengalami kesembuhan dan mengalami kematian karena penyakit Tuberkulosis.
2. Berdasarkan asumsi – asumsi tersebut diperoleh bentuk model epidemii penyakit Tuberkulosis, yakni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 8.606.375 - 3,2 \times 10^{-5} S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = 3,2 \times 10^{-5} S(t)I(t) - 0,05I(t), \end{cases}$$
 dengan titik ekuilibrium
 $(S, I) = (1563, 172072437)$ Kemudian berdasarkan nilai eigen matriks Jacobi diperoleh titik $(S, I) = (1563, 172072437)$ bersifat stabil asimtotik dengan nilai – nilai eigen $\lambda_1 = -0,05$ dan $\lambda_2 = -5506,27$.
3. Dalam penelitian ini diperoleh bilangan reproduksi dasar, yakni $R_0 = 275,404$, yang menunjukkan bahwa satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 275 jiwa atau 276 jiwa individu rentan

terhadap penyakit Tuberkulosis. Dalam hal ini, penyakit Tuberkulosis di Provinsi Sulawesi Selatan akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun ke depan.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Khalil, H.K. 2002. “Nonlinear Systems, 3rd edition”. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- [2] Kocak, H. and Hale, J.K. 1991. “Dynamics and Bifurcation”. New York: Springer Verlag.
- [3] Lynch, S., 2010, Dynamical Systems with Applications Using Maple, Birkhauser, Boston.
- [4] Olsder, G.J. 1994. “Mathematical Systems Theory”. Netherlands: Delftse Uitghehers Maatschappij, CW Delft.
- [5] Perko, L. 1991. “Differential Equations and Dynamical Systems”. New York: Springer Verlag.
- [6] Ridwan, R.M. 2013. “Stabilitas dan Bifurkasi Hopf pada model Epidemii SIRS dengan Laju Penularan Nonlinear”. Tesis Universitas Gadjah Mada.
- [7] Ridwan, R.M. dan Fardinah. 2018. “Penggunaan Model Epidemii SIR (Susceptibles-Infected-Removed) pada Penyebaran Penyakit HIV/AIDS di Makassar”. Jurnal Matematika dan Statistik dan Aplikasinya, Vol. 6 No. 2, 1-7.
- [8] Tang, Y., Huang, D., Ruan, S. and Zhang, W. 2008. “Coexistence of limit cycles and homoclinic loops in a SIRS model with a nonlinear infection forces”. SIAM J. Appl. Math., 69, 621-639.
- [9] Tjolleng, A., Komalig, H.A.H, dan Prang, J.D. 2006. “Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinear SIR (Susceptible, Infectious, and Recovered)”. Jurnal Ilmiah Sains, Vol. 13 N, 9-14.
- [10] Xiao, D., and Ruan, S. 2007. “Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate”. Math. Biosci, 208, 419-429.
- [11] Zhixing, H., Ping B., Wanbio, M., and Ruan, S. 2011. “Bifurcations of an SIRS epidemic

- model with nonlinear incidence rate”. *Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser. B*, 2, 93-112.
- [12] Zhixing, H., Ping, B., Wanbio, M., and Ruan, S. 2011. “Bifurcations of an SIRS epidemic model with nonlinear incidence rate”. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2, 93-112.