Penerapan Integral Lipat Dua dalam Penentuan Volume Permukaan Kuadratis

Muh. Irwan
UIN Alauddin Makassar, muhirwan@uin-alauddin.ac.id

Irwan
UIN Alauddin Makassar, Irwan.kasse@uin-alauddin.ac.id

Darmiani
UIN Alauddin Makassar

Erniwati Jalil
UMMA, erniwatijalil@umma.ac.id

ABSTRAK Perhitungan volume permukaan kuadratis dengan menggunakan integral lipat dua membutuhkan ketelitian dalam proses pencariannya, oleh karena itu diperlukan alat atau sarana yang dapat membantu mengecek keakuratannya. Salah satu alat atau sarana yang dapat digunakan adalah program R. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus volume permukaan kuadratis serta mengetahui aplikasi integral dalam menentukan volume benda permukaan kuadratis menggunakan program *R*. Berdasarkan hasil pengamatan diperoleh rumus volume permukaan kuadratis serta penggunaan integral dalam menentukan volume benda permukaan kuadratis menggunakan *R*. Benda permukaan kuadratis yang akan dihitung harus diukur panjang bagian-bagiannya terlebih dahulu, selanjutnya akan ditentukan daerah integrasi dan fungsi yang akan diintegrasikan.

Kata Kunci*: Integral, Permukaan Kuadratis, Program R.*

1. PENDAHULUAN

Geometri merupakan cabang matematika yang berkaitan dengan bentuk, ukuran dan sifat ruang. Oleh karena itu geometri merupakan cabang yang sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari. Adapun pengaplikasian geometri diantaranya pada pengukuran luas suatu daerah dan perhitungan volume suatu ruang.

Bangun ruang merupakan bangunan yang memiliki sisi-sisi pembatas antar ruangnya. Bangun ruang dapat ditemukan dalam bentuk objek seperti *smartphone* yang berbentuk seperti balok, terompet yang berbentuk seperti kerucut, vas bunga yang berbentuk seperti tabung dan masih banyak lagi. Selain bangun ruang tersebut, juga terdapat bangun ruang yang terbentuk berdasarkan kurva yang diputar mengelilingi suatu garis lurus antara lain seperti hiperboloida, elipsoida dan paraboloida. Kurva yang diputar meliputi elips yang menghasilkan elipsoida putaran, hiperboloida yang menghasilkan hiperboloida berdaun satu atau berdaun dua (tergantung dari kedudukan porosnya ketika diputar), dan kurva berikutnya yaitu parabola yang menghasilkan paraboloida. Pembentukan persamaan ketiganya bersifat kompleks sehingga hanya dapat diselesaikan menggunakan metode analitik tertentu.

Salah satu metode analitik yang dapat digunakan adalah integral. Integral merupakan operasi yang yang menjadi kebalikan dari turunan (*derivatif*). Terdapat dua jenis integral yaitu integral tentu dan integral tidak tentu. Adapun perbedaan dari keduanya adalah integral tentu memiliki batasan-batasan sedangkan integral tak tentu tidak memiliki batasan-batasan. Untuk penyelesaian kasus-kasus yang lebih kompleks dapat digunakan integral ganda atau integral lipat dua. Perhitungan volume menggunakan integral lipat dua dapat digunakan dua cara, yaitu sistem koordinat kartesius dan sistem koordinat kutub. Integral lipat dua dapat digunakan untuk menghitung massa total dan titik berat, nilai rata-rata fungsi dan menghitung volume benda.

Dalam menggambarkan bangun ruang yang juga akan dihitung volumenya diperlukan pula sarana untuk memperlihatkan plot gambarnya. Salah satu cara untuk membuat gambar secara lebih mudah yaitu dengan membuat program aplikasi pada komputer. Adapun program komputer yang dapat digunakan salah satunya adalah program *R*. *R* merupakan salah satu dari beberapa *software* dari aplikasi komputer yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematika seperti integral lipat dua.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Reni Panca Andri Astatik diperoleh bahwa integral lipat dua dapat digunakan untuk membuktikan volume bangun ruang seperti bola, tabung, kerucut dan elipsoida. Selanjutnya selain menggunakan cara manual, aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume bangun ruang di R^3 dapat menggunakan program *Maple* [1]

Berdasarkan uraian di atas, maka dapat dimaksudkan bahwa penilitian ini bertujuan untuk mengetahui aplikasi integral lipat dua dalam membuktikan rumus volume permukaan kuadratis suatu bangun ruang, melakukan perhitungan volume, serta mengetahui aplikasi integral lipat dua dalam perhitungan volume permukaan kuadratis dengan menggunakan program *R*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Integral Tentu

Misalkan $\boldsymbol{f}$ suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Jika

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta\overline{x}_i \quad (2.1)$$

ada, katakan $\boldsymbol{f}$ adalah terintegrasikan pada [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut integral tentu (atau integral Riemann) $\boldsymbol{f}$ dari $\boldsymbol{a}$ ke $\boldsymbol{b}$, kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta\overline{x}_i \quad (2.2)$$

Secara umum $\int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan luas bertanda daerah yang terkurung di antara kurva $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dan sumbu-$\boldsymbol{x}$ dalam interval $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, yang berarti bahwa tanda positif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di atas sumbu-$\boldsymbol{x}$ dan tanda negatif dikaitkan untuk luas bagian-bagian yang berada di bawah sumbu-$\boldsymbol{x}$. Dalam lambang, [2]

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{atas} - A_{bawah} \quad (2.3)$$

Integral Lipat Dua

Misalkan *y* suatu bilangan di $[a_2, b_2]$. Tinjaulah bidang yang sejajar dengan bidang *xz* melalui titik *(0,y,0)*. Misalkan *A(y)* adalah luas daerah bidang persekutuan antara bidang ini dengan benda itu. Dengan metode irisan sejajar, ukuran isi benda dinyatakan oleh:

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)dy \quad (2.4)$$

Karena isi benda juga ditentukan dengan integral lipat dua, maka:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y)dy \quad (2.5)$$

Dengan menggunakan persamaan di atas dapat mencari nilai integral lipat dua dari fungsi *f* pada *R* dengan menghitung integral tunggal dari *A(y)*. Karena *A(y)* adalah luas suatu daerah datar, maka dapat dicari dengan pengintegralan. Batas daerah datar itu adalah grafik persamaan *z=f(x,y)* bila *x* di $[a_1, b_1]$. Karena itu $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$. Substitusi persamaan ini ke dalam persamaan tersebut menghasilkan:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\right] dy \quad (2.6)$$

Integral pada ruas kanan persamaan di atas dinamakan integral berulang. Biasanya tanda kurung dihilangkan ketika menuliskan suau integral berulang. Jadi persamaan di atas dapat dituliskan sebagai:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\,dy \quad (2.7)$$

Ketika menghitung ruas kanan persamaan di atas, perhatikan bahwa x adalah suatu peubah integrasi dan y adalah konstan. Keadaan ini dapat dibandingkan dengan memandang y sebagai bilangan tetap ketika mencari turunan parsial dari $f(x,y)$ menurut x.

Dengan meninjau irisan bidang yang sejajar dengan bidang *yz* memperoleh suatu integral berulang yang mengubah urutan pengintegralan, memperoleh: [3]

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\,dx \quad (2.8)$$

Penerapan Integral Lipat Dua

1. Menghitung Volume Benda

Misalkan $f(x,y)$ fungsi dua peubah yang selalu bernilai tak negatif dan D adalah daerah di bidang XOY. Volume benda yang terletak di atas daerah D dan terletak di bawah permukaan $z=f(x,y)$ dapat dihitung sebagai: [4]

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

2. Massa Total

Misalkan akan mencari massa total dari kepingan yang berbentuk daerah D dengan rapat massa pada titik (x,y) adalah $\rho(x,y)$. Massa total adalah

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho(c_{ij})\Delta x \Delta y = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$

3. Nilai Rata-Rata Fungsi

Misalkan fungsi $f(x,y)$ dengan daerah definisi D. Nilai rata-rata fungsi f di D adalah

$$\frac{1}{luas(D)} \iint_D f(x,y)dxdy \qquad (2.9)$$

asalkan integral tersebut ada

Integral Substitusi Trigonometri

Untuk merasionalkan integran yang melibatkan bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ dan $\sqrt{x^2 - a^2}$ maka digunakan substitusi trigonometri sebagai berikut: [5]

Tabel 1. Bentuk Substitusi Trigonometri

Bentuk	Substitusi	Hasil	Batas
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin t$	$x = a\cos t$	$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan t$	$x = a\sec t$	$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec t$	$x = \pm a\tan t$	$0 \le t \le \pi, t \ne \frac{\pi}{2}$

PERMUKAAN KUADRATIS

Jika sebuah persamaan merupakan grafik suatu persamaan derajat-dua dalam ruang dimensi-tiga, maka ia disebut permukaan kuadrik. Penampang bidang permukaan kuadrik adalah konik. Persamaan derajat dua yang umum berbentuk $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$. Menurut Purcell dkk permukaan kuadratis terdiri dari: [6]

1. Elipsoid

   Jejak pada ketiga bidang koordinat adalah elips, demikian juga jejak di bidang yang sejajar terhadap bidang-bidang koordinat. Bentuk umum persamannya adalah

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.10)$$

2. Hiperbola Lembar-Satu

   Jejak di bidang xy adalah elips, seperti halnya jejak di bidang sejajar bidang xy. Jejak di bidang xy dan bidang yz adalah hiperbol. Bentuk umum persamaannya adalah:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.11)$$

3. Hiperboloida Lembar-Dua

   Jejak di bidang xy dan xz adalah hiperbol. Tidak terdapat jejak di bidang yz. Tetapi, bidang-bidang yang sejajar bidang yz yang memotong permukaan, memotongnya menurut elips. Bentuk umum persamaannya adalah:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2.12)$$

4. Paraboloid Elips

   Jejak di bidang xy adalah sebuah titik (titik asal). Jejak-jejak yang sejajar terhadap dan di atas bidang xy berupa elips. Jejak di bidang xz dan bidang yz adalah parabol. Bentuk umum persamaan:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad (2.13)$$

5. Paraboloid Hiperbol

   Jejak di bidang xy berupa sepasang garis berpotongan. Jejak di bidang yang sejajar terhadap bidang xy adalah hiperbol, tetapi terbuka secara berbeda tergantung pada apakah mereka di atas atau di bawah bidang xy. Jejak-jejak di bidang xz dan yz berupa parabol. Bentuk umum persamaan:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad (2.14)$$

6. Kerucut Elips

   Jejak di bidang xy adalah sebuah titik (titik asal), jejak di bidang sejajar bidang ini adalah elips. Jejak di bidang xz dan yz adalah sepasang garis berpotongan, jejak di bidang sejajar dengan kedua bidang ini adalah hiperbol. Bentuk umum persamaan:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (2.15)$$

Program R

Bahasa pemrograman R adalah cabang dari bahasa pemrograman yang disebut S. Bahasa ini dikembangkan oleh Ross Ihaka dan Robert Gentleman dari University of Auckland, Selandia Baru. Ini terutama diadopsi oleh ahli statistik dan sekarang standar *de facto* untuk komputasi statistik. [7] Software *R* dapat di *download* secara bebas dari CRAN. Beberapa istilah dalam *R* adalah sebagai berikut: [8]

1. *Object R* merupakan suatu bahasa pemrograman berorientasi obyek dan semua yang di dalam *R* merupakan obyek.
2. *Vector* adalah kumpulan dari satu atau lebih obyek dengan jenis yang sama.
3. *Function* merupakan kumpulan instruksi yang menghasilkan satu atau lebih obyek.
4. *Parameter* adalah jenis informasi yang dapat ditempatkan pada *function*.
5. *Argument* merupakan informasi tertentu yang berkaitan dengan *function* untuk menentukan bagaimana fungsi seharusnya melakukan tugasnya.
6. *Operator* merupakan simbol yang digunakan untuk melakukan kerja tertentu.

INTEGRAL DALAM R

R juga bisa mengatasi permasalahan integral dengan menggunakan fungsi “integrate”. Secara umum fungsi “integrate” adalah sebagai berikut:

```
Integrate(f, lower, upper)
```

Keterangan:

f : fungsi/rumus integral
lower : batas bawah fungsi integral
upper : batas atas fungsi integral

Contoh: $\int_0^\infty 1/\left((x+1)\sqrt{x}\right)dx$

Mendefinisikan rumus/fungsi integralnya terlebih dahulu, misal dinamakan “coba”.

```
> coba = function(x)
{1/((x+1)*sqrt(x))}
```

Kemudian baru memasukkan “coba” ke dalam fungsi integral, diketahui batas bawah adalah 0 dan batas atas adalah *infinite*. [8]

```
> integrate(coba, lower = 0,
upper = Inf)
3.141593 with absolute error <
2.7e-05
```

3. METODOLOGI

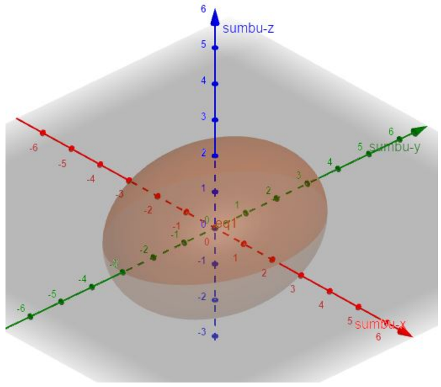
Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (kajian pustaka) yang membahas tentang aplikasi integral lipat dua dalam pencarian volume benda permukaan kuadratis menggunakan *R Programming.* Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mengukur setiap bagian benda untuk menentukan titik-titik pada persamaan
2. Menentukan fungsi menggunakan bentuk umum permukaan kuadratis dengan ukuran pada setiap titik-titik yang didapatkan.
3. Mengubah persamaan ke dalam bentuk $f(x, y)$
4. Menentukan batas pengintegralan untuk x dan y.
5. Menghitung volume benda menggunakan integral
6. Menghitung volume gelas menggunakan *R Programming*.

4. PEMBAHASAN

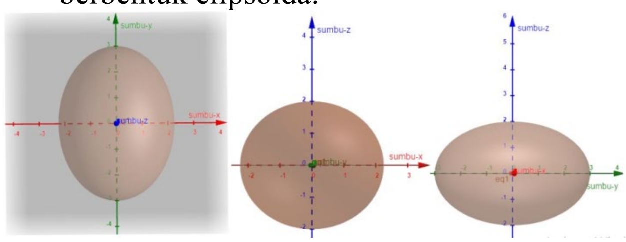
***Menyelesaikan perhitungan volume benda permukaan kuadratis menggunakan integral dan* R Programming**

1) Gambar



Gambar 4.1: *Benda Permukaan Kuadratis*

Berikut adalah gambar dari ilustrasi benda permukaan kuadratis yang berbentuk elipsoida.



Gambar 4.2 *Benda permukaan kuadratis pada bidang x dan y, bidang x dan z serta bidang y dan z*

2) Bentuk umum persamaan

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, maka berdasarkan gambar diperoleh:

$$\frac{x^2}{2{,}25^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1 \qquad (4.1)$$

3) *Mengubah bentuk umum persamaan elipsoida ke dalam bentuk* $\boldsymbol{f(x,y)}$

$$\frac{x^2}{2{,}25^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$$
$$\frac{z^2}{2^2}=1-\frac{x^2}{2{,}25^2}-\frac{y^2}{3^2}$$
$$z^2=2^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2}-\frac{y^2}{3^2})$$
$$z=\sqrt{2^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2}-\frac{y^2}{3^2})}$$
$$f(x,y)=\sqrt{2^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2}-\frac{y^2}{3^2})} \qquad (4.2)$$

4) *Menentukan batas pengintegralan*

Batas-batas integral x pada oktan 1, Dengan nilai $y=0$ dan $z=0$

$$\frac{x^2}{2{,}25^2}=1$$
$$x=\pm\sqrt{2,25^2}$$
$$x=\pm 2{,}25$$

Batas-batas integral y pada oktan 1 Dengan nilai $z=0$

$$\frac{x^2}{2{,}25}+\frac{y^2}{3^2}=1$$
$$\frac{y^2}{3^2}=1-\frac{x^2}{2{,}25^2}$$
$$y^2=3^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})$$
$$y=\pm\sqrt{3^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})} \qquad (4.3)$$

5) *Menentukan integral* $\boldsymbol{f(x,y)}$ *terhadap batas* $\boldsymbol{x}$ *dan* $\boldsymbol{y}$ *yang telah ditentukan*

Bentuk umum persamaan elipsoida yang digunakan berpusat pada titik $O(0,0,0)$, maka elipsoida terbagi menjadi 8 bagian sehingga perhitungan volume juga dibagi menjadi 8 bagian.

$$V=\int_0^{2{,}25}\int_0^{\sqrt{3^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})}}\sqrt{2^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2}-\frac{y^2}{3^2})}\;dy\,dx$$

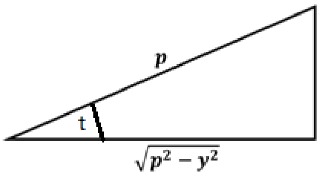
Misalkan:

$$p=\sqrt{3^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})}$$
$$p^2=3^2(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})$$
$$\frac{p^2}{3^2}=(1-\frac{x^2}{2{,}25^2})$$

$$\Rightarrow V=\int_0^{2{,}25}\int_0^{p}\sqrt{2^2(\frac{p^2}{3^2}-\frac{y^2}{3^2})}\;dy\,dx$$
$$\Rightarrow V=\frac{2}{3}\int_0^{2{,}25}\int_0^{p}\sqrt{p^2-y^2}\;dy\,dx \qquad (4.5)$$

Gunakan substitusi $y=p\sin(t)$. Dalam hal ini digunakan teknik integral substitusi trigonometri $\sin(t)=\frac{y}{p}$. Sehingga bentuk integran yang dapat dijadikan acuan untuk substitusi bentuk aljabar menjadi bentuk trigonometri dimana p adalah suatu konstanta dan t adalah sudut yaitu $\sqrt{p^2-y^2}$ dimisalkan $y=p\sin t$.

Pernyataan ini dapat di amati secara geometri pada gambar berikut ini.



Gambar 4.1: Segitiga Siku-siku

⇨ $y=p\sin(t)$ maka $dy=p\cos(t)\,dt$

$$V=\frac{2}{3}\int_0^{2{,}25}\int_0^{p}p^2\cos(t)^2\,dt\,dx$$
$$V=\frac{2}{3}\int_0^{4.5}p^2\int_0^{p}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt\,dx$$
$$V=\frac{2}{3}\int_0^{4.5}\frac{p^2}{2}\int_0^{p}(1+\cos(2t))dt\,dx$$
$$V=\frac{2}{3}\int_0^{2{,}25}\frac{p^2}{2}\left(\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^p\right)dx \qquad (4.6)$$

Substitusi $t=\sin^{-1}\frac{y}{p}$, menghasilkan:

$$V=\frac{2}{3}\int_0^{2{,}25}\left[\frac{p^2\sin(2\sin^{-1}\left|\frac{y}{p}\right|)}{4}+\frac{p^2\sin^{-1}\left|\frac{y}{p}\right|}{2}\right]_0^p dx$$

Dimana,

$$\sin(2\sin^{-1}\frac{y}{p}) = 2\sin(\sin^{-1}\left|\frac{y}{p}\right|)\cos(\sin^{-1}\left|\frac{y}{p}\right|)$$
$$=\frac{2y\sqrt{p^2-y^2}}{p^2}$$

Maka:

$$V=\frac{2}{3}\int_0^{2{,}25}\left[\frac{p^2}{2}\cdot\frac{\frac{2y\sqrt{(p^2-y^2)}}{p^2}}{2}+\frac{p^2\sin^{-1}\left|\frac{y}{p}\right|}{2}\right]_0^p dx$$

$$V=\frac{2}{2(3)}\int_0^{2{,}25}([0+p^2\cdot\frac{\pi}{2}]-[0+p^2\cdot 0])\,dx$$

$$V = \frac{2}{2(3)} \int_0^{2,25} p^2 \frac{\pi}{2}\, dx$$

$$V = \frac{2\pi}{4(3)} \int_0^{2,25} p^2\, dx$$

Variabel $\sqrt{3^2(1 - \frac{x^2}{2,25^2})}$ disubstitusikan kembali ke p

$$V = \frac{2\pi}{4(3)} \int_0^{2,25} 3^2(1 - \frac{x^2}{2,25^2})\, dx$$

$$V = \frac{(2)(3)\pi}{4}\left[\frac{4,5}{3}\right]$$

$$V = 2,25\,\pi \text{ cm}^3$$

Rumus volume elipsoida untuk oktan 1 adalah $2,25\pi$

$$Volume = 8 \cdot V$$

$$Volume = 8 \cdot 2,25\pi$$

$$Volume = 18\,\pi$$

$$Volume = 56,57142857\, cm^3$$

6) Pembuktian

Rumus umum elipsoida adalah

$$V = \frac{4}{3} abc\pi$$

$$V = \frac{4}{3}(2,25)(3)(2)\pi$$

$$V = 56,57142857\, cm^3$$

7) Program R

1) *RStudio*

```
> f = function(x) {
+   integrate(function(y) {sqrt(1 - (x/2.25)^2 - (y/3)^2)},
+             0, 3*sqrt(1 - (x/2.25)^2))$value
+ }
>
> (res = 2 * integrate(Vectorize(f), 0, 2.25)$value)
[1] 7.068584
```

2) *RGui*

```
> library(pracma)
> fun <- function(x,y) sqrt(2^2 * (1 - x^2/2.25^2 - y^2/3^2))
> xmin <- 0; xmax <- 2.25
> ymin <- 0; ymax <- function(x) sqrt(3^2 * (1-x^2/2.25^2))
> integral2(fun, xmin, xmax, ymin, ymax)
$Q
[1] 7.068702

$error
[1] 8.329057e-07
```

Berdasarkan hasil yang didapatkan pada program di atas, menghasilkan nilai 7,069 untuk 1 oktan. Sehingga volume keseluruhan benda permukaan kuadratis adalah:

$$V = 8 \cdot 7,069$$

$$V = 56,552\, cm^3$$

5. PENUTUP

Berdasarkan penelitian diperoleh hasil perhitungan volume elipsoida dengan menggunakan rumus $\frac{4}{3}abc\,\pi$ sebanyak $56,57142857\, cm^3$, menggunakan integral lipat dua menghasilkan $2,25\,\pi$ cm^3 untuk 1 oktan sehingga volume keseluruhan menghasilkan $56,57142857\, cm^3$. Adapun hasil yang diperoleh dengan menggunakan *software R Programming* sebanyak $56,552\, cm^3$.

Berdasarkan dari kesimpulan maka saran dari penulis adalah sebaiknya untuk penelitian selanjutnya penggunaan integral lipat ganda atau lebih digunakan dalam perhitungan volume benda pejal atau benda permukaan kuadratis yang lain.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Astatik, R. P. (2013). Aplikasi Integral Lipat Dua dalam Perhitungan Volume Bangun Ruang di R3 dengan menggunakan Program Maple. 31.

[2] Dale Varberg, E. J. (2010). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

[3] Bondan, A. (2007). *Kalkulus Lanjut.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

[4] Budi, W. S. (2001). *Kalkulus Peubah Banyak dan Penggunaannya.* Bandung: ITB Bandung.

[5] Dale Varberg, E. J. (2010). *Kalkulus Edisi Kesembilan Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

[6] Edwin J Purcell, D. V. (1990). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2.* Jakarta: Erlangga.

[7] Martin, T. (2015). *The Undergraduate Guide to R (A beginner's introduction to the R programming language).* New Jersey: Princeton University.

[8] Sauddin, A. (2015). *Analisis Statistik menggunakan R Programming.* Makassar: Publisher Book-website.com

[9] Effendie, A. R. (2014). *Matematika Aktuaria dengan Software R.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.