# PENYELESAIAN INVERS MOORE-PENROSE MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR

*Irwan*

*Prodi Matematika,*
*Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM*
*Irwan.msi@uin-alauddin.ac.id*

*Nurjannah*

*Mahasiswa Prodi Matematika,*
*Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM*

Info:

Jurnal MSA Vol. 4 No. 1
Edisi: Januari – Juni 2016
Artikel No.: 3
Halaman: 13 - 19
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

## ABSTRAK

Tulisan ini membahas tentang mendapatkan invers moore-penrose dari suatu matriks menggunakan metode dekomposisi nilai singular dan mendapatkan invers moore-penrose dari suatu matriks menggunakan metode dekomposisi singular dengan program Matlab. Penyelesaian invers Moore-Penrose dengan menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular yaitu $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\,\Sigma^{-1}\,\mathbf{U}^{T}$ dimana $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$ dengan $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\|\mathbf{x}_i\|}\mathbf{x}_i$ , $\sum$ terbentuk dari nilai singular matriks dan $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix}$ dengan $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$. Sehingga jika diberikan matriks: $\mathbf{A}_{3x2} = \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka didapatkan invers Moore-Penrosenya adalah : $\mathbf{A}^{+}_{2x3} = \begin{bmatrix} -i/3 & 1/3 & 2/3 \\ -i/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$. $H$al yang sama diperoleh dengan menggunakan program Matlab. Namun dengan menggunakan program Matlab penyelesaiannya akan lebih cepat.

*Kata Kunci: Invers Moore-Penrose, Nilai Singular, Dekomposisi Nilai Singular.*

## 1. PENDAHULUAN

Masalah yang sering muncul dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks yang akan dicari inversnya. Semakin besar matriksnya, semakin rumit juga perhitungannya, sehingga dibutuhkan metode yang tepat. Invers matriks digunakan untuk menyelesaikan persamaan matriks dan sistem persamaan linear. Perlu diingat bahwa pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif. Dalam invers matriks terdapat istilah invers semu (*pseudoinverse*) yang salah satu bagian dari invers semu ini adalah Invers Moore-Penrose.

Invers Moore-Penrose adalah salah satu jenis matriks invers yang dinotasikan dengan $\mathbf{A}^{+}$. Invers Moore-Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur, maka Invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar dan bahkan untuk matriks yang tidak bujur sangkar sekalipun [8].

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers Moore-Penrose suatu matriks yaitu metode Dekomposisi Nilai Singular (Singular Value Decomposition), metode Pendiagonalan Matriks (Matrix Diagonalization), dan Dekomposisi Segitiga Terpotong (*Truncated Triangular Decomposition*). Jika ditinjau dari kaidah-kaidah matematika yang digunakan oleh masing-masing metode tersebut terhadap efektifitas proses hitungan dan tingkat keakuratan hasil yang diperoleh, metode Dekomposisi Nilai Singular (Singular Value Decomposition) merupakan metode yang paling baik dibandingkan dengan kedua metode lainnya [9].

***Determinan***

Determinan dalam sebuah matriks adalah sebuah scalar (angka), yang diperoleh dari elemen-elemen matriks tersebut dengan operasi tertentu, yang merupakan karakteristik matriks tersebut. Determinan hanya ditetapkan untuk matriks bujur sangkar [4].

Determinan matriks 2 x 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dinyatakan dengan

$$\text{Det } \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sama halnya, determinan matriks 3 x 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dinyatakan dengan,

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

**Definisi 2.1**

Jika **A** adalah sebuah matriks n x n, maka sebuah vektor yang tak nol **x** di dalam $R^n$ dinamakan sebuah vektor eigen (eigen vektor) dari **A** jika **Ax** adalah kelipatan skalar dari **x**, yakni :

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari **A** dan **x** dikatakan sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matriks **A** yang berukuran n x n maka kita menuliskan kembali **Ax** = λ**x** sebagai

$$\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x}$$

atau secara ekivalen

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$$

Supaya λ adalah nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi, persamaan ini akan mempunyai persamaan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik dari **A**. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diekspansikan, maka determinan det ($\lambda$**I** – **A**) adalah sebuah polinomial di dalam λ yang dinamakan polinomial karakteristik dari **A** [1].

***Invers Moore-Penrose***

Invers Moore-Penrose adalah salah satu jenis matriks invers yang dinotasikan dengan $\mathbf{A}^+$. Invers Moore-Penrose merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Jika invers matriks yang sudah kita kenal adalah invers dari suatu matriks bujur sangkar dan non singular (determinannya tidak nol), maka Invers Moore-Penrose ada untuk setiap matriks baik matriks bujur sangkar yang singular dan bahkan untuk matriks yang tidak bujur sangkar sekalipun.

**Definisi 2.2**

Misalkan matriks **A** = $(a_{ij}) \in C_{mxn}$. Sebuah matriks **X** = $(x_{ij}) \in \mathbf{C}_{mxn}$ dikatakan sebagai generalized atau pseudo invers dari matriks **A** jika dan hanya jika **X** memenuhi satu atau lebih dari sifat-sifat berikut :

(i) **AXA** = **A**

(ii) **XAX** = **X**

(iii) $(\mathbf{AX})^H = \mathbf{AX}$

(iv) $(\mathbf{XA})^H = \mathbf{XA}$

$\mathbf{A}^H = (\overline{\mathbf{A}})^T \rightarrow$ conjugate transpose dari matriks **A**. Jika elemen-elemen dari matriks **A** $\in$ R maka $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^T$.

**Definisi 2.3**

a) Matriks **X** dikatakan sebagai Moore-Penrose Generalized Invers dari matriks A jika dan hanya jika matriks X memenuhi keempat sifat yang diberikan pada definisi dai atas dan dinotasikan dengan $\mathbf{A}^+$ [5].

***Dekomposisi Nilai Singular***

Suatu proses dekomposisi akan memfaktorkan sebuah matriks menjadi lebih dari satu matriks. Singular Value Decomposition atau Dekomposisi Nilai Singular yang selanjutnya ditulis dengan SVD adalah suatu teknik yang digunakan secara luas untuk mendekomposisikan suatu matriks ke dalam beberapa matriks yang berkaitan erat dengan nilai singular dari matriksnya. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan Faktorisasi. Dalam SVD, suatu matriks difaktorkan menjadi tiga buah matriks, dimana salah satu matriks tersebut entrinya merupakan nilai singular dari matriksnya. Berikut ini akan diberikan definisi nilai singular [3].

**Definisi 2.4**

Diberikan matriks dengan elemen-elemennya anggota himpunan kompleks $\mathbf{A} \in C^{mxn}$ dengan rank ($\mathbf{A}$) = r, dimana $r \leq \min(m,n)$, nilai eigen dari matriks $A^TA$ adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ akar nilai eigen positif dari $A^TA$ disebut nilai singular ($\sigma$) dari matriks A dan dinyatakan dengan

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n \; [5]$$

Matriks **A** adalah matriks m x n dimana $m \geq n$ (Asumsi ini hanya dibuat untuk mempermudah, semua hasil juga akan berlaku jika $m < n$). Metode yang akan digunakan adalah suatu metode untuk menentukan seberapa dekat **A** pada suatu matriks dengan rank lebih kecil. Metode tersebut melibatkan pemfaktoran **A** ke dalam hasil kali $\mathbf{U} \sum \mathbf{V}^T$, dimana $\sum$ adalah matriks yang semua entri di luar diagonalnya adalah 0, dan elemen-elemen diagonalnya memenuhi

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Semua $\sigma_i$ yang ditentukan dengan faktorisasi ini adalah tunggal dan disebut nilai-nilai singular dari matriks A. Faktorisasi $\mathbf{U} \sum \mathbf{V}^T$ disebut dekomposisi nilai singular (*singular value decomposition*) dari matriks **A**. Rank dari matriks **A** sama dengan jumlah nilai singular taknolnya, dan besarnya nilai-nilai singular taknol ini menjadi suatu ukuran mengenai seberapa dekat matriks **A** terhadap suatu matriks yang ranknya lebih rendah [7].

## 2. METODOLOGI PENELITIAN

Untuk mendapatkan penyelesaian invers Moore-Penrose dari suatu matriks menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular, maka langkah-langkah yang diambil sebagai berikut:

1. Menentukan matriks m x n yang akan dicari nilai invers Moore-Penrosenya.
2. Menentukan hasil perkalian dari matriks $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ kemudian mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut.
3. Menyusun matriks **V** yang elemen-elemennya adalah vektor eigen dari $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.
4. Menyusun Matriks **U**
5. Nilai singular dalam $\sum$ adalah akar pangkat dua dari nilai-nilai eigen matriks $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.
6. Nilai singular adalah elemen-elemen diagonal dari $\sum$ dan disusun dengan urutan menurun.
7. Menentukan dekomposisi nilai singular dari matriks **A**.
8. Menentukan invers Moore-Penrose dari matriks **A**.

   Invers Moore-Penrose dari matriks **A** telah didapatkan.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### *Hasil*

Menentukan invers Moore-Penrose matriks dengan menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular. Untuk menjawab permasalahan yang ada digunakan langkah-langkah berikut yang dapat berlaku secara umum sehingga pengerjaannya dapat dikerjakan secara konsisten dan khusus pada matriks yang bujur sangkar maupun tidak bujur sangkar.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Invers Moore-Penrose dari matriks A yaitu:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\,\Sigma^{-1}\,\mathbf{U}^T$$

Contoh :

Menentukan invers Moore-Penrose matriks 3 x 2 menggunakan metode dekomposisi nilai singular:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ yaitu sebagai berikut :

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1=3$ dan $\lambda_2=1$.

Vektor-vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1=3$ yaitu $[1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. Vektor-vektor yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_2=1$ yaitu $[-1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. Dengan demikian,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menyusun matriks $\sum$ yaitu :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$$

Matriks $\sum$ yang terbentuk adalah :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan matriks V yaitu :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|}\mathbf{x}_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_2\|}\mathbf{x}_2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan matriks **U** yaitu :

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{A}\mathbf{v}_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{A}\mathbf{v}_2$$
$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

diperoleh :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi, dekomposisi nilai singular dari matriks **A** yaitu :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{i}\sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan invers Moore-Penrose dari matriks **A** yaitu :

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\mathrm{i}\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Jadi, invers Moore-Penrose dari matriks **A** yaitu:

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

***Aplikasi Program Matlab***

Penyelesaian Invers Moore-Penrose dari Matriks dengan Menggunakan Dekomposisi Nilai Singular dengan Program Matlab ordo 3x2 yaitu:

Menentukan Invers Moore-Penrose dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular

```
----------------------------------------------------
MASUKKAN MATRIKS A: [complex(0,1)
complex(0,1);1 0;0 1]
A =
        0 + 1.0000i         0 + 1.0000i
        1.0000                   0
        0                           1.0000
Menyusun Matriks V
V =
   -0.7071    0.7071
    0.7071    0.7071
Menyusun Matriks Sigma
sig =
    1.0000         0
         0    1.7321
Matriks U :
U =
0                  0 + 0.8165i
-0.7071                0.4082
0.7071                 0.4082
Invers Moore-Penrose dari Matriks A yaitu :
MP =
0 - 0.3333i   0.6667            -0.3333
0 - 0.3333i  -0.3333             0.6667
```

Berikut adalah script program matlab yang digunakan dalam menentukan invers Moore-Penrose menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular :

```
clc
clear
disp('Menentukan Invers Moore-Penrose
dengan Menggunakan Metode Dekomposisi
Nilai Singular')
disp('-----------------------')
A=input('MASUKKAN MATRIKS A: ')
[b,k]=size(A);
AT=A';
ATA=AT*A;
if det(ATA)==0
    ATA=AT*A
    disp('Determinan Matriks ATA')
    det(ATA)
    disp('Matriks yang diinput adalah
matriks singular')
else
    if k==3
    disp('Transpose dari matriks A
yaitu :')
    AT=A'
    disp('Hasil perkalian dari matriks
ATA :')
        ATA=AT*A
        [x D]=eig(ATA);
    disp('Nilai Eigen dari Matriks ATA
: ')
        eig(ATA)
    disp('Vektor Eigen dari Matriks ATA
: ')
        x
    disp('Menyusun Matriks V ')
    x1=x(:,1)
        px1=norm(x1)
        Vx1=(1/px1)*x1
%menormalisasikan vektor eigen
    x2=x(:,2)
        px2=norm(x2)
        Vx2=(1/px2)*x2
    x3=x(:,3)
        px3=norm(x3)
        Vx3=(1/px3)*x3
    V=[Vx1 Vx2 Vx3]
    Vt=V'
%Menentukan nilai singular Matriks A
    o=diag(D)
    p=sqrt(D)
    c=sqrt(o);
    [n,m]=size(p);
    disp('Menyusun Matriks Sigma')
        sig=eye(n,n)*p
        eye(n,n)*p;
    disp('Invers dari Matriks sigma')
        inv(sig)
    disp('Matriks U')
        c1=c(1,:)
        c2=c(2,:)
        c3=c(3,:)
        U1=(1/c1)*A*Vx1
        U2=(1/c2)*A*Vx2
        U3=(1/c3)*A*Vx3
        U=[U1 U2 U3]
    disp('Transpos dari matriks U :')
        Ut=U'
    disp('Invers Moore-Penrose dari
matriks A yaitu :')
        MP=V*(inv(sig))*Ut
    else if k==4
```

```
disp('Transpose dari matriks A yaitu :')
    AT=A'
disp('Hasil   perkalian   dari   matriks
ATA:')
        ATA=AT*A
        [x D]=eig(ATA);
disp('Nilai Eigen dari Matriks ATA : ')
        eig(ATA)
disp('Vektor Eigen dari Matriks ATA : ')
        x
disp('Menyusun Matriks V ')
    x1=x(:,1)
        px1=norm(x1)
        Vx1=(1/px1)*x1
%menormalisasikan vektor eigen
    x2=x(:,2)
        px2=norm(x2)
        Vx2=(1/px2)*x2
    x3=x(:,3)
        px3=norm(x3)
        Vx3=(1/px3)*x3
    x4=x(:,4)
        px4=norm(x4)
        Vx4=(1/px4)*x4
    V=[Vx1 Vx2 Vx3 Vx4]
    Vt=V'
    %Menentukan   nilai   singular   dari
Matriks A
    o=diag(D)
    p=sqrt(D)
    c=sqrt(o);
    [n,m]=size(p);
    disp('Menyusun Matriks Sigma')
        sig=eye(n,n)*p
        eye(n,n)*p;
    disp('Invers dari Matriks sigma')
        inv(sig)
    disp('Matriks U')
        c1=c(1,:)
        c2=c(2,:)
        c3=c(3,:)
        c4=c(4,:)
        U1=(1/c1)*A*Vx1
        U2=(1/c2)*A*Vx2
        U3=(1/c3)*A*Vx3
        U4=(1/c4)*A*Vx4
        U=[U1 U2 U3 U4]
    disp('Transpos dari matriks U :')
        Ut=U'
    disp('Invers   Moore-Penrose   dari
matriks A yaitu :')
        MP=V*(inv(sig))*Ut
    else
    disp('Transpose   dari   matriks   A
yaitu :')
        AT=A'
    disp('Hasil  perkalian  dari  matriks
ATA :')
        ATA=AT*A
        [x D]=eig(ATA);
 disp('Nilai Eigen dari Matriks ATA : ')
        eig(ATA)
    disp('Vektor Eigen dari Matriks ATA
: ')
        x
    disp('Menyusun Matriks V ')
    x1=x(:,1)
        px1=norm(x1);
        Vx1=(1/px1)*x1
%menormalisasikan vektor eigen
    x2=x(:,2);
        px2=norm(x2);
        Vx2=(1/px2)*x2
    V=[Vx1 Vx2]
    Vt=V'
%Menentukan nilai singular Matriks A
    o=diag(D);
    p=sqrt(D);
    c=sqrt(o);
    [n,m]=size(p);
    disp('Menyusun Matriks Sigma')
        sig=eye(n,n)*p
        eye(n,n)*p;
disp('Invers dari Matriks sigma')
        inv(sig)
disp('Matriks U :')
        c1=c(1,:);
        c2=c(2,:);
        U1=(1/c1)*(A*Vx1)
        U2=(1/c2)*(A*Vx2)
        U=[U1 U2]
disp('Transpose dari Matriks U')
    Ut=U'
    disp('Invers   Moore-Penrose   dari
Matriks A yaitu :')
    MP=V*(inv(sig))*Ut
    end
    end
end
```

## 4. PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, matriks yang diangkat pada contoh adalah matriks berordo 3 x 2 yang diselesaikan dalam dua tahap yaitu perhitungan secara manual dan dengan menggunakan program Matlab. Namun sebelumnya, peneliti membahas tentang penyelesaian umum invers Moore-Penrose dengan menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular agar lebih terarah dalam menyelesaikan invers Moore-Penrose secara manual maupun dalam program Matlab.

Pada penyelesaian secara manual, penulis terlebih dahulu menentukan matriks yang akan dicari nilai invers Moore-Penrosenya (misalnya matriks **A)** kemudian menentukan transpose dari matriks **A** ($\mathbf{A}^T$). Langkah selanjutnya adalah mengalikan matriks $\mathbf{A}^T$ dengan matriks **A** kemudian menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari hasil perkalian matriks $\mathbf{A^TA}$. Langkah selanjutnya adalah menentukan matriks $\sum$ yang elemen-elemen dari diagonal utamanya adalah nilai singular dari matriks $\mathbf{A^TA}$ sedangkan elemen-elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Langkah selanjutnya adalah menyusun matriks **V** yang elemen-elemennya adalah vektor-vektor eigen yang dinormalisasikan. Selanjutnya menyusun matriks **U** yang elemen-elemennya adalah basis ortonormal dari matriks. Karena matriks $\sum$, **V**, dan **U** telah didapatkan, maka langkah selanjutnya adalah menentukan dekomposisi nilai singular dari matriks **A** yaitu $\mathbf{U} \sum \mathbf{V}^T$. Dengan demikian, akan lebih mudah menentukan invers Moore-Penrose dari matriks **A** yaitu $\mathbf{A^+=V\sum^{-1}U^T}$.

Dengan menggunakan program Matlab seperti pada script program di atas, langkah pertama yang dilakukan adalah menginput matriks A yang berukuran mxn dengan $n \leq 3$ , kemudian mengecek apakah matriks yang diinput adalah matriks singular maka matriks tersebut tidak akan diproses. Untuk matriks berukuran m x n dengan m < n determinannya adalah nol dan tidak memiliki invers Moore-Penrose. Jika matriks yang diinput adalah matriks non singular maka matriks tersebut akan diproses sampai nilai invers Moore-Penrose dari matriks tersebut telah didapatkan. Pada penelitian ini, nilai invers Moore-Penrose dari hasil perhitungan manual sama dengan hasil yang didapatkan dengan menggunakan program Matlab. Tetapi, kelebihan menggunakan program Matlab yaitu waktu yang digunakan untuk mendapatkan invers Moore-Penrose dari suatu matriks akan lebih sedikit dibandingkan perhitungan secara manual.

## 5. KESIMPULAN

1. Penyelesaian invers Moore-Penrose dengan menggunakan metode Dekomposisi Nilai Singular yaitu $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\,\Sigma^{-1}\,\mathbf{U}^T$ dimana $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$ dengan $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\|\mathbf{x}_i\|}\mathbf{x}_i$ , $\sum$ terbentuk dari nilai singular matriks dan $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n]$ dengan $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i}\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ . Sehingga jika diberikan matriks:

$$\mathbf{A}_{3x2} = \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka didapatkan invers Moore-Penrosenya adalah :

$$\mathbf{A}^+_{2x3} = \begin{bmatrix} -i/3 & 1/3 & 2/3 \\ -i/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

2. Penyelesaian invers Moore-Penrose dari suatu matriks dengan menggunakan program Matlab. Program yang dibuat sesuai dengan langkah-langkah pada prosedur penelitian sehingga didapatkan invers Moore-Penrose

$$\mathbf{A}^+_{2x3} = \begin{bmatrix} -i/3 & 1/3 & 2/3 \\ -i/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

yang memiliki hasil yang sama dengan penyelesaian secara manual. dengan menggunakan program Matlab penyelesaiannya akan lebih cepat walaupun mariks yang digunakan berukuran besar. Untuk matriks m x n dengan m < n tidak memiliki invers Moore-Penrose karena determinannya bernilai nol.

## DAFTAR PUSTAKA


[1] Anton Howard. *Aljabar Linear Elementer Edisi Ketiga.* Jakarta: Erlangga, 1991.

[2] ___________. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Edisi 7 Jilid 1.* Batam : Interaksara, 2000.

[3] Ariyanti, G., *Dekomposisi Nilai Singular dan Aplikasinya* (Yogyakarta : Universitas Widya Mandala Madiun, 2010), h.35

[4] BSW, Pudjiastuti. *Matriks Teori dan Aplikasi,* Yogyakarta : Graha Ilmu, 2006.

[5] Haidir, Irdam dan Lucia Ratnasari. "Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Menggunakan Analisis SVD", *Jurnal Matematika Vol.13 No.1*. Semarang : FMIPA UNDIP, 2010 (21 Mei 2014)

[6] Halim, Siana. *Diktat Aljabar Linear*. Bandung : Teknik Industri UK Petra, 2013.

[7] Leon, Steven J. *Aljabar Linear dan Aplikasinya Edisi Kelima*. Jakarta : Erlangga, 2001.

[8] Misshobah Ida. *Matriks Invers Moore-penrose dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier.* Semarang : Universitas Diponegoro, 2008.

[9] Subekti. B, *Perbandingan Metode-metode Penyelesaian dari Sistem Persamaan Linear yang Singular*, https://www.google.com/search?q=jurnal+perbandingan+metode-metode+penyelesaian+dari+sistem+persamaan+linear+yang+singular (Diakses pada tanggal 20 Mei 2014), h.1