Solusi Numerik Sistem Persamaan Reaksi Kimia dan Neraca Massa Menggunakan Metode Newton-Raphson

Ilham Syata
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, ilham.syata@uin-alauddin.ac.id

Sayyidan Nisa
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, sayyidannisa@gmail.com

ABSTRAK, Tujuan penelitian ini adalah menentukan solusi numerik sistem persamaan linear dari model persamaan reaksi kimia dan neraca massa dengan menggunakan metode newton rapshon. Adapun langkah-langkah penelitian yaitu menuliskan system persamaan linear, menentukan nilai awal, mencari nilai fungsi system persamaan linear dengan nilai tebakan awal yang telah ditentukan pada lngkah sebelumnya, mencari turunan-turunan fungsi system persamaan linear, mencari nilai-nilai devisi dari masaing-masing variable, mencari nilai selesaian menggunakan persamaan $Tebakan_{baru} = Tebakan_{lama} + deviasi$, ulangi iterasi sampai nilai fungsi mendekati 0 atau sama dengan 0. Hasil penelitian yang diperoleh adalah nilai C_{A1}, C_{A2}, C_{A3} dan C_{A4} berturut-turut adalah 0,909091; 0,696881; 0,665424541 dan 0,585573596.

Kata Kunci: *persamaan reaksi kimia dan neraca massa, Metode Newton-Raphson*

1. PENDAHULUAN

Persoalan yang melibatkan model matematika sering muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti bidang Fisika, Biologi, Kimia, Ekonomi, Kesehatan, Teknik Sipil, Teknik Mesin, dan sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang rumit atau tidak dapat diselesaikan dengan metode biasa, sehingga diperlukan suatu metode yang disebut Metode Numerik.

Metode numerik merupakan suatu cara untuk menyelesaikan model matematika dengan pendekatan numerik. Metode numerik ini digunakan untuk permasalahan matematika yang tidak dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan secara analitik [6]. Salah satu pendekatan numerik adalah mencari nilai-nilai x yang memenuhi persamaan $f(x) = 0$. Sebuah bilangan yang merupakan akar dari sebuah persamaan jika seandainya bilangan tersebut dimasukkan ke dalam persamaan, maka nilai persamaan itu akan sama dengan nol atau bisa dikatakan akar sebuah persamaan $f(x) = 0$ adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai $f(x)$ sama dengan nol. Beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menghitung perkiraan solusi persamaan linier/non-linear seperti metode Newton Raphson, metode broyden, metode steepest descant, dan lain-lain [9].

Penelitian ini untuk mencari solusi numerik system persamaan linear dari sebuah reaksi kimia dan neraca massa dengan menggunkan metode newton rapshon. Metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear maupun sistem persamaan tak linear dimana kita akan mencari hampiran atau pendekatan terhadap akar fungsi real [2]. Metode Newton Raphson sering konvergen dengan cepat, apabila nilai awal yang digunakan pada iterasi pertama cukup dekat dengan akar yang diinginkan. Dalam penyelesaian sistem persamaan linear maupun tak linear yang terdiri dari himpunan nilai-nilai x secara simultan memberikan semua persamaan tersebut nilai yang sama dengan nol [4].

2. TINJAUAN PUSTAKA

Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear merupakan gabungan dua atau lebih persamaan linear yang saling berkaitan satu dengan yang lainnya. Sistem persamaan linear memegang peranan penting dalam aljabar linear. Aljabar linear sering dihadapkan pada persoalan mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linear.

Definisi

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear dengan variabel-variabel yang tidak diketahui. Sistem persamaan linear terdiri dari m persamaan $(L_1, L_2, \dots, L_m)$, dengan n variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$, dapat disusun dalam bentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2$$
$$. \qquad . \qquad .$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = k_m (1)$$

Dengan a_{ij} dan k_i adalah konstanta a_{ij} adalah koefisien dari variabel yang tidak diketahui x_j pada persamaan L_i dan bilangan k_i adalah konstanta dari persamaan L_i [3].

Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor secara umum berarti deret pangkat $(x - a)$, dengan a adalah konstanta.

Suatu fungsi yang terdifferensial sampai orde n di $x = a$, jika diberikan fungsi f. Fungsi f tersebut dapat dinyatakan oleh suatu deret pangkat dalam $x - a$.

Rumus deret Taylor

Misalkan f fungsi turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka I yang mengandung a. Maka masing-masing x dalam I

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f"(a)}{n!}(x-a)^n \text{ (2) [6].}$$

Metode Newton Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan pengembangan dari deret Taylor pada pemotongan suku orde-2 yaitu:

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'^{(x_n)} \quad (2)$$

Karena mencari akar dari $f(x_{n+1}) = 0$, maka diperoleh:

$$0 \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) \quad (3)$$

Atau dapat ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, f'(x_n) \neq 0 \quad (4)$$

[5].

Metode Newton merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persoalan satu persamaan. Sedangkan untuk menyelesaikan persoalan persamaan yang lebih dari satu atau system persamaan $F(X) = 0$ dikenal dengan metode Newton-Raphson. Metode Newton memerlukan turunan dari fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ untuk setiap iterasinya. Sedangkan pada metode Newton-Raphson ini menggunakan matriks Jacobian $J(X)$ untuk setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut digunakan sebagai pengganti turunan dari fungsi $F(X)$ atau dalam matematika ditulis $F'(X)$.

Defini dari matriks jacobian adalah sebagai berikut

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n(X)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dengan syarat matriks $J(X)$ adalah matriks nonsingular. Sehingga rumus metode Newton-Raphson yaitu:

$$X_{n+1} = X_n - J(X_n)^{-1}F(X_n); n = 0, 1, 2, \dots (6)$$

[1].

Fungsi Determinan dan Aturan Cramer

Fungsi Determinan

Definisi

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan det (A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det (A) dinamakan determinan A.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ disebut elemen-elemen (unsur-unsur) determinan tingkat n punya n baris dan n kolom, jadi banyaknya elemen ada $n\,x\,n = n^2$ buah. [6]

Teorema

Bila $A(n\,x\,n)$ matriks segitiga atas/bawah, maka $Det(A)$ adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonal utama. [8]

Secara umum: untuk $A(3\,x\,3)$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix}$$

diagonal utama

$$\begin{matrix} +a_{11}a_{12}a_{13} \neq 0 & & -a_{11}a_{23}a_{32} \\ +a_{12}a_{23}a_{31} & & -a_{12}a_{21}a_{31} \\ +a_{13}a_{21}a_{32} & & -a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

Aturan Cramer

Teorema: Jika $AX - B$ adalah system yang terdiri dari n persamaan linier dalam n bilangan tak diketahui sehingga $\det(A) \neq 0$, maka system tersebut mempunyai system pemecahan yang unik. Pemecahan adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Dimana A_i adalah matriks yang didapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke-j dari A dengan entri-entri matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Bukti:

Jika $\det(A) \neq 0$, maka A dapat dibalik. Dan $X = A^{-1}B$ adalah pemecahan unik dari $AX = B$. Sehingga diperoleh:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} adj(A)B$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks-matriks ini akan memberikan

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} & b_2C_{12} & \dots & b_nC_{n1} \\ b_1C_{21} & b_2C_{22} & \dots & b_nC_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1C_{1n} & b_2C_{2n} & \dots & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke-j dari X, dengan demikian

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_n}{\det(A)}$$

Sekarang misalkan

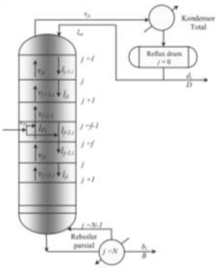
$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena A_j berbeda dari A hanya dalam kolom ke-j, maka kovaktor dari entri-entri yang bersesuaian dalam kolom ke-j dari a. Perluasan kofaktor $\det(a_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_n$.

Dengan mensubtitusikan hasil ini ke dalam $x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_n}{\det(A)}$ maka akan memberikan $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$ *terbukti* [6].

Aplikasi Teknik Kimia yang Menghasilkan Sistem Persamaan Linear

Neraca massa dan energi adalah *tools* utama bagi insinyur kimia. Neraca tersebut misalnya diterapkan pada proses distilasi bertingkat atau multikomponen yang menghasilkan seperangkat persamaan yang dapat berupa persaman diferensial atau aljabar. Seringkali sistem yang dianalisis adalah persamaan nonlinier, sehingga menghasilkan seperangkat persamaan nonlinier. Namun, banyak prosedur telah dikembangkan dengan linearisasi persamaan dan menerapkan teknik iteratif konvergensi untuk sampai pada penyelesaian dari system persamaan nonlinier. Sebuah contoh klasik dari penggunaan teknik ini adalah dalam analisis kolom distilasi, seperti yang ditunjukkan pada Gambar di bawah. Neraca massa steady state diterapkan pada bagian rektifikasi kolom menghasilkan persamaan berikut:



Gambar 1. Kolom distilasi

Neraca massa sekitar kondensor:

$$V_1 y_{1i} = L_{01} x_{0i} + D\, x_{Di} \qquad (8)$$

Neraca massa di atas tahap j:

$$V_j y_{ji} = L_{j-1} x_{j-1} + D\, x_{Di} \qquad (9)$$

Asumsi bahwa tahap bearada dalam kesetimbangan dan kolom meggunakan kondensor total sehingga hubungan kesetimbangan berikut berlaku:

$$y_{ji} = k_{ji} x_{ji} \qquad (10)$$

Persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) dan (2) dan semuanya dibagi dengan $D\, x_{Di}$ maka dihasilkan persamaan:

$$\frac{V_1 y_{1i}}{D\, x_{1i}} = \frac{L_0 z_{jF} F}{D\, x_{1i}} x_{1i} + 1 \qquad (11)$$

$$\frac{V_j y_j}{D\, x_{1i}} = \left(\frac{L_{j-1}}{K_{j-1,i}}\right)\left(\frac{V_{j-1} y_{j-1,i}}{D\, x_{1i}}\right) + 1 \qquad (12)$$

Laju alir molal komponen tunggal didefinisikan sebagai:

$$v_{ji} = V_1 y_{1i} \qquad (13)$$

$$d_i = D\, x_{Di} \qquad (14)$$

Untuk beberapa tahap j, rasion adsorpsi didefinisikan sebagai:

$$A_{1i} = \frac{L_j}{K_j V_j} \qquad (15)$$

Dan untuk kondenser total:

$$A_{0i} = \frac{L_0}{D} \qquad (16)$$

Substitusi persamaan (6) – (8) ke persamaan (4) dan (5) dihasilkan:

$$\left(\frac{V_{1i}}{d_i}\right) = A_{0i} + 1 \qquad (17)$$

$$\left(\frac{V_{1i}}{d_i}\right) = A_{j-1,i}\left(\frac{V_{j-1,i}}{d_i}\right) + 1 \qquad (18)$$

Untuk setiap perhitungan percobaan yang diberikan A dianggap sebagai konstanta. Yang tidak diketahui dalam persamaan di atas adalah kelompok $\frac{v_{ji}}{d_i}$. Jika hal ini diganti dengan x_{ji} dan subskrip i, komponen menunjukkan komponen i yang dijatuhkan, seperangkat persamaan berikut dapat ditulis untuk kolom yang berisi lima tahap kesetimbangan di atas tahap/plat umpan.

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & & & = A_0 + 1 & \\ -A_1 x_1 & + x_2 & & & & = 1 & \\ & -A_2 x_2 & + x_3 & & & = 1 & (19) \\ & & -A_3 x_3 & + x_4 & & = 1 & \\ & & & -A_4 x_4 & + x_5 & = 1 & \end{array}$$

Ini adalah seperangkat persamaan aljabar linier simultan. Ini sebenarnya adalah seperangkat khusus yang hanya memiliki persyaratan bukan nol pada diagonal dan satu elemen yang berdekatan. Ini adalah satu set matrik bidiagonal. Bentuk umum persamaan linier simultan adalah:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = c_3 \quad (20) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = c_n \end{array}$$

di mana semua koefisien a_{ij}, dapat berupa nilai yang bukan nol. Seperangkat persamaan ini biasanya sering dinyatakan dalam vektor matrix dengan notasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{c} \qquad (21)$$

Dimana **A** adalah koefisien matriks.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dan **c** adalah vector konstanta

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Ketika vector **c** adalah vector nol, maka seperangkat persamaan di atas disebut *homogen* [7].

3. METODOLOGI

Metode Penelitian dan Langkah Pengerjaan

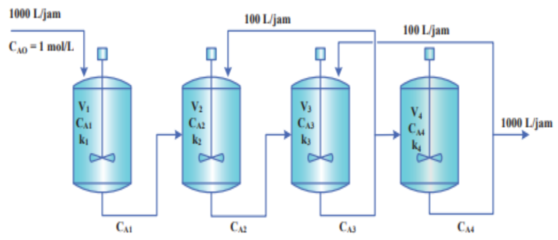
Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode *newton rapshon*. Adapun Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi langkah-langkah berikut:

1. Menuliskan Sistem Persamaan Linear
2. Menentukan nilai tebakan awal pada masing-masing variabel
3. Mencari nilai fungsi sistem persamaan linier dengan nilai tebakan awal yang telah ditetukan pada langkah diatas
4. Mencari turunan-turunan fungsi sistem persamaan linier di atas terhadap masing-masing variabelnya
5. Mencari nilai-nilai deviasi dari masing-masing variable
6. Mencari nilai selesaian yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

   $$\text{Tebakan}_{\text{baru}} = \text{Tebakan}_{\text{lama}} + \text{deviasi}$$
7. Melakukan proses iterasi dengan mengulang Langkah ke-dua sampai didapatkan nilai fungsi sekecil mungkin atau mendekati nol.

4. PEMBAHASAN

Suatu reaksi kimia dijalankan dalam serangkaian empat reactor alir tangka berpengaduk (CSTR) yang disusun seperti gambar dibawah.



Gambar 2. Rangkaian Reaktor CSTR

Reaksi kimia adalah reaksi *irrevible* orde satu dengan persamaan reaksi:

$$A \rightarrow B$$

Kondisi temperature dalam setiap reactor sebagaimana nilai konstanta laju rekasi k_i berbeda di setiap reaktor. Volume setiap reaktor, V_i juga berbeda. Nilai k_i dan V_i diberikan pada table dibawah. Berikut asumsi yang dapat digunakan untuk system tersebut.

a. Sistem adalah *steady state*
b. Reaksi terjadi di fasa cair
c. Tidak ada perubahan volume atau densitas cairan
d. Laju pengurangan komponen A dalam setiap reactor dinyatakan dengan:
   $R_i = V_i k_i C_{Ai}$ (mol/jam)

Tabel 1. Volume dan konstanta laju reaksi setiap reaktor

Reaktor	$V_i\ (L)$	$k_i\ (Jam^{-1})$
1	1000	0,1
2	1500	0,2
3	100	0,4
4	500	0,3

Susunlah persamaan Neraca Massa untuk keempat reaktor dan tentukan konsentrasi (C_{Ai}) yang keluar dari tiap reaktor.

Penyelesaian:

Neraca Massa unsteady state untuk setiap reaktor adalah:

Rate of input – Rate of output – Rate of Reaction = Rate of Accumulation

Karena system adalah steady state, maka laju akumulasi adalah nol, neraca massa dapat disederhanakan menjadi:

Rate of input – Rate of output – Rate of Reaction = 0

Penyusunan neraca massa untuk setiap reactor menghasilkan persamaan:

$$1000C_{A0} - 1000C_{A1} - V_1k_1C_{A1} = 0$$
$$1000C_{A1} + 100C_{A3} - 1100C_{A2} - V_2k_2C_{A2} = 0$$
$$1100C_{A2} + 100C_{A4} - 1200C_{A3} - V_3k_3C_{A3} = 0$$
$$1100C_{A3} - 1100C_{A4} - V_4k_4C_{A4} = 0$$

Substitusi nilai C_{A1}, V_1 dan k_1 diperoleh persamaan:

$$1100C_{A1} = 1000$$
$$1000_{CA1} - 1400_{CA2} + 100_{CA3} = 0$$
$$1100_{CA2} - 1240_{CA3} + 100_{CA4} = 0$$
$$1100_{CA3} - 1250_{CA4} = 0$$

Misalkan $C_{A1} = v, C_{A2} = x, C_{A3} = y, C_{A4} = z$

Langkah 1: Sistem persamaan linier diatas dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(v,x,y,z) = 1100v + 0x + 0y + 0z = 1000$$
$$G(v,x,y,z) = 1000v - 1400x + 100y + 0z = 0$$
$$H(v,x,y,z) = 0v + 1100x - 1240y + 100z = 0$$
$$J(v,x,y,z) = 0v + 0x + 1100y - 1250z = 0$$

<u>ITERASI 1</u>

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan awal v_0, x_0, y_0, z_0

Yaitu $v_0 = 0,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0\ dan\ z_0 = 0$

Langkah 3: Mencari nilai fungsi dari keempat persamaan dengan nilai tebakan awal $v_0 = 0$, $x_0 = 0,\ y_0 = 0\ dan\ z_0 = 0$ yaitu:

$$F(0,0,0,0) = 1100v + 0x + 0y + 0z = 1000$$
$$= 1100(0) + 0(0) + 0(0) + 0(0) - 1000$$
$$= -1000$$

$$G(0,0,0,0) = 1000v - 1400x + 100y + 0z = 0$$
$$= 1000(0) - 1400(0) + 100(0) + 0(0) - 0$$
$$= 0$$

$$H(0,0,0,0) = 0v + 1100x - 1240y + 100z = 0$$
$$= 0(0) + 1100(0) - 1240(0) + 100(0) - 0$$
$$= 0$$

$$J(0,0,0,0) = 0v + 0x + 1100y - 1250z = 0$$
$$= 0(0) + 0(0) + 1100(0) - 1250(0) - 0$$
$$= 0$$

Langkah 4: Mencari turunan-turunan fungsi terhadap masing-masing variabelnya, yaitu:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 1100 \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial v} = 1000 \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = -1400$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = 100 \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial H}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = 1100$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = -1240 \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 100$$
$$\frac{\partial J}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial y} = 1100 \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = -1250$$

Langkah 5: Mencari nilai-nilai deviasi dari nilai $v, x, y\ dan\ z$

Nilai-nilai deviasi tersebut dimisalkan $r_1, s_1, t_1\ dan\ u_1$. Untuk mencari nilai tersebut terlebih dahulu turunan fungsi beserta nilai fungsi sistem persamaan linier dibentuk menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian perhitungan dilanjutkan dengan mencari matriks $A, A_1, A_2, A_3\ dan\ A_4$ dengan aturan cramer. Adapun hasilnya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1100 & 1000 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 1000 & 0 \\ 1000 & -1400 & 0 & 0 \\ 0 & 1100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 0 \\ 0 & 0 & 1100 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat matriks $A, A_1, A_2, A_3\ dan$ A_4 dengan aturan cramer diatas, kemudian dilanjutkan dengan mencari determinan matriks-matriks di atas untuk mendapatkan nilai $r_1, s_1, t_1\ dan\ u_1$. Yaitu:

$$r_1 = \frac{det_{A_1}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1{,}8785\ x\ 10^{12}}{-2{,}06635\ x\ 10^{12}}$$

$$= 0.909091$$

$$s_1 = \frac{det_{A_2}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 1000 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1{,}44\ x\ 10^{12}}{-2{,}06635\ x\ 10^{12}}$$

$$= 0{,}696881$$

$$t_1 = \frac{det_{A_3}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 1000 & 0 \\ 1000 & -1400 & 0 & 0 \\ 0 & 1100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1375000\ x\ 1000^2}{-2{,}06635\ x\ 10^{12}}$$

$$= 0{,}66542451$$

$$u_1 = \frac{det_{A_4}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 0 \\ 0 & 0 & 1100 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1210000 \; x \; 1000^2}{-2{,}06635 \; x \; 10^{12}}$$

$= 0{,}585573596$

Langkah 6: Setelah mendapatkan nilai $r_1, s_1, t_1 \; dan \; u_1$ di atas, akan dicari nilai pendekatan yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

$v_1 = v_0 + r_1$
$= 0 + 0{,}90$
$= \mathbf{0{,}90}$

$x_1 = x_0 + s_1$
$= 0 + 0{,}6968$
$= \mathbf{0{,}6968}$

$y_1 = y_0 + t_1$
$= 0 + 0{,}6654$
$= \mathbf{0{,}6654}$

$z_1 = z_0 + u_1$
$= 0 + 0{,}585574$
$= \mathbf{0{,}5855}$

Nilai v_1, x_1, y_1, z_1 akan digunakan sebagai nilai tebakan awal untuk langkah berikunya

<u>ITERASI 2</u>

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan awal v_1, x_1, y_1, z_1

Yaitu $v_1 = 0{,}909091$; $x_1 = 0{,}696881$; $y_1 = 0{,}665424541$; $z_1 = 0{,}585573596$

Langkah 3: Mencari nilai fungsi dari keempat persamaan dengan nilai tebakan awal v_1, x_1, y_1, z_1 yaitu:

$F(0{,}909091; 0{,}696881; 0{,}665424; 0{,}585573)$
$= 1100v + 0x + 0y + 0z = 1000$
$= 1100(0{,}909091) + (0{,}696881)$
$+(0{,}665424) + (0{,}585573) - 1000$
$= 0$

$G(0{,}909091; 0{,}696881; 0{,}665424; 0{,}585573)$
$= 1000v - 1400x + 100y + 0z = 0$
$= 1000(0{,}909091) - 1400(0{,}696881)$
$+100(0{,}665424) + 0(0{,}588873) - 0$
$= -0{,}000000000000142109$
$= -1{,}42109 \; x \; 10^{-13}$

$H(0{,}909091; 0{,}696881; 0{,}665424; 0{,}585573)$
$= 0v + 1100x - 1240y + 100z = 0$
$= 0(0{,}909091) + 1100(0{,}696881)$
$-1240(0{,}665424) + 100(0{,}588873) - 0$
$= 0{,}000000000000121$
$= 1{,}21 \; x \; 10^{-13}$

$J(0{,}909091; 0{,}696881; 0{,}665424; 0{,}585573)$
$= 0v + 0x + 1100y - 1250z = 0$
$= 0(0{,}909091) + 0(0{,}696881)$
$+1100(0{,}665424) - 1250(0{,}588873) - 0$
$= 0$

Langkah 4: Mencari nilai-nilai deviasi dari nilai $v, x, y \; dan \; z$

Nilai-nilai deviasi tersebut dimisalkan $r_2, s_2, t_2 \; dan \; u_2$. Untuk mencari nilai tersebut terlebih dahulu turunan fungsi beserta nilai fungsi sistem persamaan linier dibentuk menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}42109 \; x \; 10^{-13} \\ 1{,}21 \; x \; 10^{-13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian perhitungan dilanjutkan dengan mencari matriks $A, A_1, A_2, A_3 \; dan \; A_4$ dengan aturan cramer. Adapun hasilnya sebagai berikut:

$$= \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}42109 \; x \; 10^{-13} & -1400 & 100 & 0 \\ -1{,}21 \; x \; 10^{-13} & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 1{,}42109 \; x \; 10^{-13} & 100 & 0 \\ 0 & -1{,}21 \; x \; 10^{-13} & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 1{,}42109\,x\,10^{-13} & 0 \\ 0 & 1100 & -1{,}21\,x\,10^{-13} & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -1250 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 1{,}42109\,x\,10^{-13} \\ 0 & 1100 & -1240 & -1{,}21\,x\,10^{-13} \\ 0 & 0 & 1100 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat matriks $A, A_1, A_2, A_3\ dan\ A_4$ dengan aturan cramer diatas, kemudian dilanjutkan dengan mencari determinan matriks-matriks di atas untuk mendapatkan nilai $r_2, s_2, t_2\ dan\ u_2$. Yaitu:

$$r_2 = \frac{det_{A_1}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}42109E-13 & -1400 & 100 & 0 \\ -1{,}21E-13 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{0}{-2{,}06635\,x\,10^{12}}$$

$$= 0$$

$$s_2 = \frac{det_{A_2}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 1{,}42109E-13 & 100 & 0 \\ 0 & -1{,}21E-13 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{0{,}000208491}{-2{,}06635\,x\,10^{12}}$$

$$= -1{,}00898\,x\,10^{-16}$$

$$t_2 = \frac{det_{A_3}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 1{,}42109\,x\,10^{-13} & 0 \\ 0 & 1100 & -1{,}21\,x\,10^{-13} & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -1250 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1{,}7586\,x\,10^{-5}}{-2{,}06635\,x\,10^{12}}$$

$$= 8{,}51063\,x\,10^{-18}$$

$$u_2 = \frac{det_{A_4}}{det_A}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 1{,}42109\,x\,10^{-13} \\ 0 & 1100 & -1240 & -1{,}21\,x\,10^{-13} \\ 0 & 0 & 1100 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1100 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & -1400 & 100 & 0 \\ 0 & 1100 & -1240 & 100 \\ 0 & 0 & 1100 & -1250 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{-1{,}5476\,x\,10^{-5}}{-2{,}06635\,x\,10^{12}}$$

$$= 7{,}48935\,x\,10^{-18}$$

Langkah 5: Setelah mendapatkan nilai $r_2, s_2, t_2\ dan\ u_2$ di atas, akan dicari nilai pendekatan yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan di bawah ini:

$$v = v_1 + r_2$$
$$= 0{,}909091 + 0$$
$$= \mathbf{0{,}909091}$$
$$x = x_1 + s_2$$
$$= 0{,}696881 - 1{,}00898\,x\,10^{-16}$$
$$= \mathbf{0{,}696881}$$
$$y = y_1 + t_2$$
$$= 0{,}665424541 + 8{,}51063\,x\,10^{-18}$$
$$= \mathbf{0{,}665424541}$$
$$z = z_1 + u_2$$
$$= 0{,}585573596 + 7{,}48935\,x\,10^{-18}$$
$$= \mathbf{0{,}585573596}$$

Iterasi selanjutnya dapat diperhatikan table berikut

Tabel 4.2. Iterasi Newton Rapshon

No	v	x	y	z	F	G	H	J
0	0	0	0	0	1000	0	0	0
1	0,909091	0,696881	0,696881	0,585573596	0	1,42109E-13	-1,21E-13	0
2	0,909091	0,696881	0,665424541	0,585573596	0	2,84217E-14	-7,11E-15	0
3	0,909091	0,696881	0,665424541	0,585573596	0	2,84217E-14	-7,11E-15	0

Karena Nilai $F, G, H\ dan\ J$ sudah mendekati 0 maka, iterasi dihentikan

Sehingga:

$$\boldsymbol{C_{A1} = v = 0,909091}$$
$$\boldsymbol{C_{A2} = x = 0,696881}$$
$$\boldsymbol{C_{A3} = y = 0,665424541}$$
$$\boldsymbol{C_{A4} = z = 0,585573596}$$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dengan menggunakan langkah-langkah metode Newton Raphson dimana nilai awalan konsentrasi $C_{A1} = C_{A2} = C_{A3} = C_{A4} = 0$, maka diperoleh konsentrasi C_{A1} yang keluar dari tiap reaktor sebesar 0,909091; C_{A2} sebesar 0,696881; C_{A3} sebesar 0,665424541 dan C_{A4} 0,585573596. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode Newton Raphson dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan reaksi kimia dan neraca massa dalam rangkaian reaktor CSTR untuk memperoleh konsentrasi (C_{Ai}) yang keluar dari tiap reaktor diinginkan. Semakin kecil nilai deviasi atau nilai galat yang didapat, maka nilai selesaiannya juga semakin tepat. Untuk memperoleh nilai deviasi atau nilai galat yang semakin kecil, dibutuhkan proses perhitungan yang lama, sehingga komputer disini berperan dalam membantu perhitungan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Burden, R.L, dan Faires, J.D. 2011. Numerical Analysis Ninth Edition. Boston: BROOKS/CALE.

[2] Chong, Edwin K.P. & Stanislaw H. Zak. 2008. An introduction To Optimization Third Edition. United States Of America: Wiley.

[3] Marzuki, Corry Corazon dan herawati (2015). Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fully Fuzzy* Menggunakkan Metode Iterasi Jacobi. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol.1(1), 2

[4] Mathews, John. H. 1992. Numerical Methods. Prentice-hall Internasional, Inc.

[5] Munir, R. 2008. Metode Numerik. Bandung

[6] Nasiha, Khutwatun. 2008. Penyelesaian Sistem Persamaan Tak-Linear dengan Metode Newton-Raphson [Skripsi] Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Malang.

[7] Rustamaji, Heri. 2017. Pengantar Komputasi Teknik Kimia dengan Matlab dan Simulink. Lampung: CV. Anugrah Utama Raharja

[8] Santi, Rina Candra Noor (2012). Implementasi Sistem Persamaan Linear menggunakan metode Aturan Cramer. *Jurnal Teknologi Informasi DINAMIK* Vol.17 (1), 3

[9] Wulan, Elis Ratna, dkk. (2017). Solusi Numerik Persamaan Non-Linear dengan Menggunakan Metode Newton-Raphson Modifikasi Fuzzy. *Jurnal UIN SGD*. Vol X (2), 2