

Perbandingan Hasil Numerik Metode Konjugat Gradien Hibrid Baru (Ls-Dy) Dan Metode Hs-Cd

T. Murdani Saputra

Prodi Matematika FMIPA, Universitas Syiah Kuala, tmurdanisaputra@unsyiah.ac.id

Ikhsan Maulidi

Prodi Matematika FMIPA, Universitas Syiah Kuala, ikhsanmaulidi@unsyiah.ac.id

Radhiah

Prodi Matematika FMIPA, Universitas Syiah Kuala, radhiah@unsyiah.ac.id

ABSTRAK. Metode konjugat gradien merupakan suatu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier pada skala besar, yang mana metode tersebut diperkenalkan oleh Hestenes dan Stiefel untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Metode konjugat gradien merupakan metode iteratif dan juga merupakan salah satu metode yang efektif dalam menyelesaikan optimasi tak terkendala. Dalam tulisan ini, penulis melakukan pengusulan metode konjugat gradien hibrid baru berdasarkan ide dari metode NH1, NH2, NH3 dan NH4. Metode hibrid tersebut diusulkan berdasarkan dari kekurangan dan kelebihan dari metode sebelumnya yaitu metode HS, FR, PRP, CD, LS dan Metode DY. Kekurangan dan kelebihan dari metode-metode tersebut diantaranya proses kinerja komputasi (iterasi) kurang baik dan kekonvergenan global. Berdasarkan dari metode-metode hibrid yang diusulkan tersebut maka penulis mengusulkan metode baru yaitu penggabungan dari metode LS dengan metode DY, dimana metode LS memiliki kelebihan pada kinerja komputasi dan DY kelebihannya pada kekonvergenan globalnya. Metode hibrid baru yang diusulkan tersebut yaitu metode NH5 (LS-DY) dan metode yang diusulkan ini akan di ujikan pada fungsi tak linear orde tinggi. Metode baru menunjukkan bahwa fungsi-fungsi yang diberikan dapat diselesaikan dengan sangat efisien serta perbandingan metode NH5 dengan metode-metode sebelumnya menunjukkan hasil pada proses komputasinya baik dan dapat bersaing

Kata Kunci: metode konjugat gradien, metode hibrid, knerja komputasi.

1. PENDAHULUAN

Salah satu cara dalam menyelesaikan sistem persamaan linear adalah dengan menggunakan metode konjugate gradient, dimana cara tersebut diperkenalkan oleh Hestenes dan Stiefel pada tahun 1952. Metode konjugat gradient juga merupakan salah satu metode yang efektif dalam menyelesaikan masalah optimasi tak terkendala, berikut masalah optimasi tak terkendala:

$$\min f(x), x \in R^n \quad (1)$$

dengan R^n merupakan notasi dari ruang Euclidean n-dimensi dan $f: R^n \rightarrow R$ merupakan

fungsi turunan kontinu. Metode konjugat gradien merupakan metode iteratif sehingga persamaan (1.1) dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan berikut:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

dimana α_k adalah ukuran langkah yang ditentukan dengan menggunakan line search dan d_k adalah pencarian arah (descent direction). Bentuk dari α_k yang merupakan ukuran langkah dimana ukuran tersebut ditentukan dengan menggunakan line search. Ukuran langkah yang biasa digunakan yaitu exact atau inexact line search dimensi satu. Bentuk dari exact line search sebagai berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha_k d_k), \quad (3)$$

Sedangkan bentuk dari inexact line search yang biasanya dikenal dengan kondisi armijo dan kondisi curvature, adapun formula tersebut sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \\ \nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k &\geq \sigma \nabla f(x_k)^T d_k \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $0 < \delta < \sigma < 1$ (Nocedal & Wright, 1999). Dalam penelitian ini, kondisi yang digunakan adalah kondisi strong Wolfe. Kondisi tersebut merupakan kondisi armijo dan curvature yang dikenal dengan kondisi Wolfe. Kondisi lain yang bisa digunakan dalam mencari α_k adalah dengan menggunakan kondisi strong Wolfe, dimana bentuk kondisinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \\ \|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k\| &\leq -\sigma \nabla f(x_k)^T d_k \end{aligned} \quad (5)$$

dengan $0 < \delta < \sigma < 1$ [1]. Dalam penelitian ini, kondisi yang digunakan adalah kondisi strong Wolfe.

Untuk menentukan d_k yang merupakan pencarian arah yang dalam hal ini menggunakan metode konjugat gradien dapat menggunakan bentuk berikut:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & \text{untuk } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & \text{untuk } k > 0 \end{cases} \quad (6)$$

dengan g_k adalah gradien dari f di x_k , dan β_k merupakan skalar yang ditentukan oleh beberapa bentuk berikut:

$$\beta_k^{HS} = \frac{g_k^T y_{k-1}}{d_{k-1}^T y_{k-1}}, \quad \beta_k^{FR} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-2}\|^2}, \quad \beta_k^{PRP} = \frac{g_k^T y_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}$$

$$\beta_k^{CD} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T g_{k-1}}, \quad \beta_k^{LS} = -\frac{g_k^T y_{k-1}}{d_{k-1}^T g_{k-1}}, \quad \beta_k^{DY} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}}$$

dengan $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ dan $\|\cdot\|$ merupakan norm Vektor Euclid.

Metode yang dituliskan di atas merupakan metode yang diperkenalkan oleh Hestenes-Stiefel (HS) [2], Fletcher-Reeves (FR) [3], Polak – Ribière (PRP) [4] dan [5], Fletcher (Conjugate Descent atau CD)[6], Liu-Storey (LS) [7], dan Dai-Yuan (DY) [8]. Untuk skalar tersebut yang dituliskan diatas memiliki beberapa kekurangan dan kelebihan pada proses kinerja komputasi dan kekonvergenan global. Metode PRP, HS dan LS merupakan metode yang memiliki kinerja komputasi lebih baik, sedangkan sifat konvergensi globalnya lemah. Disisi lain, metode FR, CD dan DY memenuhi sifat konvergensi globalnya kuat sedangkan hasil kerja komputasinya tidak efisien yang mana tidak bisa bersaing dengan metode lain.

Metode gabungan tersebut menunjukkan baik dan terpenuhi sifat konvergensi globalnya dan juga baik dalam proses kinerja komputasinya[9]. Hal yang sama dilakukan oleh [10], [11] dan [12] yang dimana metode yang diusulkan adalah metode NH1, NH2, NH3 dan NH4. Metode tersebut menunjukkan bahwa baik pada hasil komputasi dan sifat konvergensi globalnya kuat. Dalam artikelnya, [10] menggabungkan antara metode PRP dan metode FR dan modifikasi dari metode FR yaitu metode MFR, dimana metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{H1} \triangleq \max \left\{ 0, \min \left\{ \beta_k^{PRP}, \beta_k^{FR} \right\} \right\} \quad (7)$$

$$\text{MFR: } d_k = -g_k + \beta_k^{FR} d_{k-1} - \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} g_k$$

$$= - \left(1 + \beta_k^{FR} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{FR} d_{k-1}, \quad (8)$$

pada bentuk persamaan (1.8) [10] menggantikan bentuk β_k^{FR} dengan bentuk β_k^{H1} sehingga diperoleh persamaan baru yaitu

$$d_k = - \left(1 + \beta_k^{H1} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H1} d_{k-1} \quad (9)$$

Metode tersebut merupakan metode NH1, sedangkan untuk metode yang kedua yaitu NH2 juga dilakukan hal yang sama yaitu dengan menggabungkan metode HS dan DY yang dituliskan dengan β_k^{H1} , bentuk tersebut kemudian menggantikan bentuk DY pada metode MDY [10] dan bentuk metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{H2} \triangleq \max \left\{ 0, \min \left\{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{DY} \right\} \right\} \quad (10)$$

dan

$$\text{MDY: } d_k = -g_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} - \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} g_k$$

$$= - \left(1 + \beta_k^{DY} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} \quad (11)$$

Untuk metode NH2 yaitu

$$d_k = - \left(1 + \beta_k^{H2} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H2} d_{k-1} \quad (12)$$

Metode selanjutnya yaitu metode NH3 dan NH4 diperoleh dari hal yang sama juga seperti yang dilakukan oleh [9] dan [10]. Dalam artikel [11] mengusulkan metode modifikasi dari metode CD yang dikenal diberi nama dengan metode MCD. Berdasarkan dari metode MCD maka [11] mengusulkan bentuk metode baru yaitu metode NH3 yang merupakan metode gabungan antara Metode LS- CD dan hal yang juga dilakukan oleh [12] mengusulkan metode NH4 merupakan gabungan metode HS-CD yang dimana bentuk tersebut menggunakan bentuk metode MCD. Bentuk metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{H3} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{LS}, \beta_k^{CD} \} \} \quad (13)$$

dan

$$\begin{aligned} \text{MCD: } d_k &= -g_k + \beta_k^{CD} d_{k-1} - \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} g_k \\ &= - \left(1 + \beta_k^{CD} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{CD} d_{k-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

dengan menggantikan bentuk β_k^{CD} , dengan bentuk metode H3, diperoleh bentuk baru yaitu metode NH3:

$$\text{NH3: } d_k = - \left(1 + \beta_k^{H3} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H3} d_{k-1}, \quad (15)$$

dan untuk metode H4 dan NH4 sebagai berikut

$$\text{H4: } \beta_k^{H4} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{CD} \} \}, \quad (16)$$

dan

$$\text{NH4: } d_k = - \left(1 + \beta_k^{H4} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H4} d_{k-1}, \quad (17)$$

Metode- metode tersebut yang telah diusulkan memenuhi bentuk descent yaitu $g_k^T d_k = -\|g_k\|^2$.

Berdasarkan ide yang telah dikemukakan pada [9], [10], [11] serta [12] maka dalam tulisan ini penulis akan mengusulkan metode baru yaitu metode gabungan antara metode LS dan metode

DY yang merupakan metode NH5 (Metode LS-CD) yang dimana bentuk tersebut nantinya akan digantikan pada metode MDY. Berikut metode baru yang diusulkan:

$$\text{H5: } \beta_k^{H5} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{LS}, \beta_k^{DY} \} \}, \quad (18)$$

dengan menggunakan bentuk MDY, maka bentuk metode baru sebagai berikut:

$$\text{NH5: } d_k = - \left(1 + \beta_k^{H5} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H5} d_{k-1}. \quad (19)$$

2. ALGORITMA METODE NH5

Langkah awal : Diberikan titik awal $x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon \leq 1, 0 < \delta < \frac{1}{2}$ dan $\delta < \sigma < 1$.
Tetapkan $d_0 = -g_0, k := 0$.

Langkah 1: Jika $\|g_k\| < \varepsilon$, berhenti; jika tidak lanjutkan ke langkah 2

Langkah 2: Hitung ukuran langkah α_k menggunakan kondisi Wolfe (1.4).

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \\ \nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k &\geq \sigma \nabla f(x_k)^T d_k \end{aligned}$$

Langkah 3: Misalkan $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, jika $\|g_{k+1}\| < \varepsilon$, berhenti; jika tidak lanjutkan ke langkah 4

Langkah 4: Hitung pencarian arah

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_{k+1}^{H5} d_k,$$

dimana $\beta_k^{H5} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{LS}, \beta_k^{DY} \} \}$

Langkah 5: Beri nilai $k = k + 1$, dan kembali ke langkah 2.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan dilakukan perbandingan hasil numerik antara metode HS-CD dengan metode baru LS-DY. Parameter α_k dilakukan pencaharian menggunakan kondisi wolfe yang dimana konstanta yang digunakan adalah $\mu = 0.3, \delta = 0.8$. Untuk batas toleransi atau perhentian yang digunakan dalam tulisan ini yaitu $\varepsilon = 10^{-6}$. Fungsi yang digunakan dalam

tulisan ini adalah fungsi non linier tak berkendala yang diperoleh dari [13], berikut fungsi-fungsinya:

1. Extended Rosenbrock function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n/2} c(\mathbf{x}_{2i} - \mathbf{x}_{2i-1}^2)^2 + (1 - \mathbf{x}_{2i-1})^2,$$

$$\mathbf{x}_0 = [-1.2, 1, \dots, -1.2, 1]. \quad c = 100.$$

2. Extended White & Holst function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n/2} c(\mathbf{x}_{2i} - \mathbf{x}_{2i-1}^3)^2 + (1 - \mathbf{x}_{2i-1})^2,$$

$$\mathbf{x}_0 = [-1.2, 1, \dots, -1.2, 1]. \quad c = 100.$$

3. Extended quadratic penalty QP1 function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{x}_i^2 - 2)^2 + (\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2 - 0.5)^2,$$

$$\mathbf{x}_0 = [1, 1, \dots, 1, 1].$$

4. SINCOS function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n/2} (\mathbf{x}_{2i-1}^2 + \mathbf{x}_{2i}^2 + \mathbf{x}_{2i-1}^2 \mathbf{x}_{2i}^2)^2$$

$$+ \sin^2 \mathbf{x}_{2i-1} + \cos^2 \mathbf{x}_{2i}, \quad \mathbf{x}_0 = [3, 0.1, \dots, 3, 0.1].$$

5. Extended Beale function

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n/2} (1.5 - \mathbf{x}_{2i-1}(1 - \mathbf{x}_{2i}))^2$$

$$+ (2.25 - \mathbf{x}_{2i-1}(1 - \mathbf{x}_{2i}^2))^2$$

$$+ (2.625 - \mathbf{x}_{2i-1}(1 - \mathbf{x}_{2i}^3))^2,$$

$$\mathbf{x}_0 = [1, 0.8, \dots, 1, 0.8].$$

Pada hasil numerik setelah diperoleh akan dibandingkan hasil numerik antara metode baru (NH5) dengan metode HS-CD (NH4) serta metode hibrid lain (metode NH2 dan NH3). Hasil numerik yang telah diperoleh pada metode-metode tersebut, selanjutnya akan digabungkan menggunakan hasil profil yang dijelaskan dalam [14]. Hasil profil tersebut akan diilustrasikan dalam bentuk gambar yaitu hasil profil iterasi dan running time sehingga dapat dilihat perbedaan kemampuan metode baru dengan metode yang telah diusulkan sebelumnya. Adapun hasil profilnya sebagai berikut:

$$r_{p,m} = \frac{a_{p,m}}{\min \{a_{p,m} : m \in M\}},$$

dimana $M = \{p1, p2, \dots\}$, $M = \{m1, m2, m3, \dots\}$, $a_{p,m}$ merupakan hasil yang diperoleh dari iterasi dan running time. Apabila suatu metode tidak dapat diselesaikan atau hasil numeriknya tidak ada maka, maka $r_{p,m} = r_M$, diasumsikan parameter $r_M \geq r_{p,m}$ untuk semua p, m . Untuk melihat hasil profil, maka dapat bentuk persamaan berikut:

$$P_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size} \{p \in P : \log_2 \{r_{p,m}\} \leq \tau\},$$

dengan $P_s(\tau)$ adalah peluang untuk metode $m \in M$ dimana hasil ratio $r_{p,m}$ kurang dari faktor $\tau \in \mathbb{R}$ dari kemungkinan ratio terbaik dan n_p adalah banyaknya fungsi. Fungsi $P_s(\tau)$ merupakan fungsi distribusi komulatif untuk hasil ratio. Nilai $P_s(1)$ merupakan peluang dimana metode yang diujikan akan lebih baik apabila mencapai angka 1.

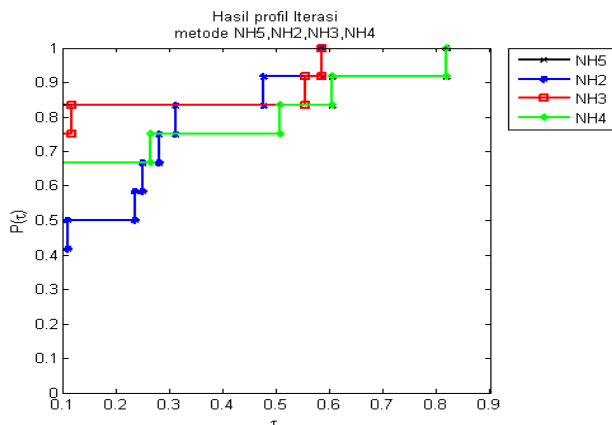
Tabel 1. Hasil numerik berupa iterasi dan running time

No	Fungsi	N	NH5 Itr/rt	NH2 Itr/rt	NH3 Itr/rt	NH4 Itr/rt
1	Rosenbrock	10	184/0.4355	249/0.4928	179/0.3677	254/0.4846
		100	1010/2.2159	1016/2.3523	1043/2.3039	962/2.2378
		1000	8771/55.9225	8695/49.9178	8548/48.3147	8282/48.1698
2	White and Host	10	272/0.6627	279/0.5697	259/0.5479	261/0.6003
		50	1024/2.6939	1000/2.3866	968/2.4005	962/2.4171

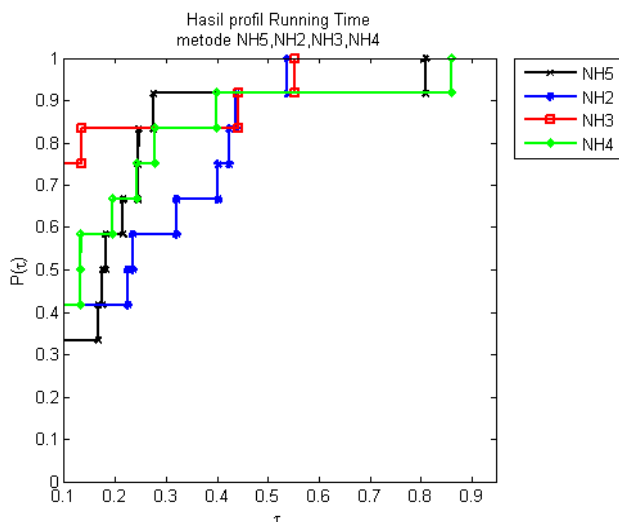
3	Quadratic QP1	Penalty	100	16/0.2221	16/0.2313	15/0.2173	15/0.1980
			1000	8/1.2282	12/1.7764	8/1.2274	8/1.2235
			50	17/0.1675	20/0.1843	17/0.1477	18/0.1691
4	SINCOS		100	16/0.2708	19/0.3576	24/0.3968	17/0.3202
			1000	15/4.7851	15/4.7629	22/6.4625	18/5.7778
			2	38/0.1895	31/0.1881	25/0.1599	38/0.1751
5	Beale		5	231/0.6775	159/0.5236	131/0.3867	231/0.7020

Keterangan: N (dimensi dari fungsi), itr (banyaknya iterasi) dan rt (running time).

Untuk melihat perbedaan antara metode baru dan metode dahulu, maka dalam akan digunakan teori hasil profil. Berdasarkan teori hasil profil yang telah dijelaskan di atas, maka hasil numerik berupa iterasi dan running time disajikan dalam gambar 1 dan 2 sebagai berikut



Gambar 1. Hasil profil iterasi metode baru (NH5) dengan metode NH2, NH3 dan NH4



Gambar 2. Hasil profil running time metode baru (NH5) dengan metode NH2, NH3 dan NH4

Pada gambar 1 dan 2 merupakan hasil numerik berupa banyaknya iterasi dan running time, dari gambar tersebut menunjukkan bahwa metode NH5 dapat bersaing dengan metode sebelumnya. Metode NH5 menunjukkan hasil yang baik setiap iterasi dan running time pada fungsi yang dengan metode baru tersebut.

4. KESIMPULAN

Pada tulisan ini diusulkan metode konjugat gradien baru yang diberi nama NH5, dimana metode tersebut digabungkan berdasarkan ide yang dikemukakan oleh beberapa artikel sebelumnya. Metode baru ini setelah diujikan ke beberapa fungsi tak linier orde tinggi menunjukkan bahwa hasil yang baik dan dapat diselesaikannya yang dimana terlihat pada tabel 1 dan juga metode baru ini dapat bersaing dengan metode hibrid sebelumnya.

5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nocedal, J., & Wright, SJ. (1999). Numerical Optimization. New York: Springer-Verlag.
- [2] Hestenes, MR., Stiefel EL. (1952). Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear System. Journal of Research of the National Bureau of Standart. 49(6): 409-432.
- [3] Fletcher, R., & Reeves, C. (1964). Function Minimazation by Conjugate Gradient. The Computer Journal, 7:149 – 154.

- [4] Polak, B., Ribière, G. (1969). Note Sur la Convergence des Méthodes de Directions Conjuguées. *Francaise Informat Recherche Opertionelle*, 16:35–43.
- [5] Polyak, BT. (1969). The Conjugate Gradient Method in Extreme Problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4): 94-112.
- [6] Fletcher, R, (1987). *Practical Methods of Optimization, Unconstrained Optimization*. New York: Wiley.
- [7] Liu, YL., & Storey, CS. (1991). Efficient Generalized Conjugate Gradient Algorithms, Part 1: Theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(1):129-137.
- [8] Dai, YH., & Yuan, Y. (1999). A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property. *SIAM Journal on Optimization*, 10: 177-182.
- [9] Touati-Ahmed, D., & Storey, C. (1990). Efficient Hybrid Conjugate Gradient Techniques: *Journal of Optimization Theory and Applications*, 64(2): 379–397.
- [10] Zhang, L., & Zhou, W. (2007). Two Descent Hybrid Conjugate Method for Optimazation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216:251-264.doi: 10.1016/j.cam.2007. 04.028.
- [11] Zhou, A., Zhu, Z., Fan, H., & Qing, Q. (2011). Three New Hybrid Conjugate Gradient Method for Optimazation. *Applied Mathematics*, 2:303-308.doi: 10.4236/am.2011.23035.
- [12] Saputra, T. Murdani., Silalahi, Bib Paruhum., & Guritman, Sugi. (2020). Metode Konjugat Gradien Hibrid Baru: Metode HS-CD Untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi Tak Berkendala. *Journal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, 8:37-45. doi: 10.24252/msav8i1.12294.
- [13] Andrei, N. (2008). An Unconstrained Optimization Test Function Collection. *Advanced Modelling and Optimization*, 10(1): 147-161.
- [14] Dolan, JED., & Morè, JJ. (2002). Benchmarking Optimization Software with Performance Profil. *Mathematical Programming*. 912(2): 201-213.doi: 10.1007/s101070100263