Analisis Dan Simulasi Penyakit Infeksi Saluran Pernapasan Akut Di Kabupaten Bulukumba Dengan Menggunakan *Model Susceptible Exposed Infectious Recovered* (SEIR)

Muh. Irwan
Prodi Matematika FST, UIN Alauddin Makassar, muhirwan @uin-alauddin.ac.id

Try Azisah Nurman
Prodi Matematika FST, UIN Alauddin Makassar, try.azisah@uin-alauddin.ac.id

Sitti Muflihah
Prodi Matematika FST, UIN Alauddin Makassar, sittimuflihah@gmail.com

Hikmawati Pathuddin
Prodi Matematika FST, UIN Alauddin Makassar, hikmawati.pathuddin@uin-alauddin.ac.id.

ABSTRAK, Penelitian ini membahas tentang model Susceptible Exposed Infectious Recovered (SEIR) penyakit Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA) untuk memprediksi laju penyebaran penyakit ISPA di Kabupaten Bulukumba. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model penyebaran penyakit ISPA dengan menggunakan SEIR, untuk mengetahui analisis titik kesetimbangan dan kestabilan dari model penyebaran penyakit ISPA dan untuk mengetahui simulasi dari model tersebut. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh model matematika SEIR yang terdiri dari tiga persamaan differensial yang mempresentasikan laju peningkatan atau penurunan disetiap kelompok indivisu. Dari model tersebut diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, endemik penyakit dan Reproduksi Dasar.

Kata Kunci*: Penyakit ISPA, Model SEIR*

1. PENDAHULUAN

Penyakit menular cenderung mendapat perhatian lebih dari pemerintah dibandingkan dengan penyakit tidak menular. Salah satu penyakit menular yang banyak menyita perhatian dunia termasuk Indonesia adalah Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA). Penyakit ISPA disebabkan oleh bakteri, virus, jamur dan lain-lain (Widoyono, 2008). Secara menyeluruh ISPA masih menjadi penyakit yang menyita perhatian para praktisi kedokteran dan kesehatan masyarakat. Bahkan setiap tahunnya tercatat bahwa hampir 4 juta orang meninggal karena ISPA, dimana 98% dari jumlah tersebut disebabkan oleh infeksi saluran pernapasan bawah, dengan tingkat kematian paling banyak terjadi pada negara dengan pendapatan rendah atau menengah.

Pravelensi ISPA tahun 2018 di Sulawesi Selatan berdasarkan kelompok umur yang tertinggi adalah balita umur 1-4 tahun dan yang cenderung lebih banyak terinfeksi berjenis kelamin laki-laki, dengan presentasi 2,04% laki-laki dan 1,67% perempuan. Menurut Riskesdas Kabupaten Bulukumba menempati posisi ke-5 dengan jumlah penderita ISPA tertinggi (RISKESDAS, 2018) [1]. Olehnya itu upaya penanggulangan ISPA telah dilakukan diberbagai negara termasuk Indonesia dengan mengacu pada program Millenium Developmen Goals (MDGs) yang direkomendasikan oleh World Health Organization (WHO).

Melihat banyaknya penderita ISPA, dan telah dilakukan berbagai upaya penanggulangan penyakit tersebut, maka sangat perlu untuk mengetahui penyebaran penyakit ini. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah pemodelan matematika. Model SEIR dapat digunakan untuk mempresentasikan penyebaran penyakit ISPA. Model SEIR adalah perkembangan dari model SIR dengan tambahan kompartemen E. Model SEIR terdiri dari 4 kompartemen yaitu Individu yang rentan (susceptible), individu yang bergejala (exposed), individu yang terinfeksi (infectious) dan individu yang telah sembuh (recovered).

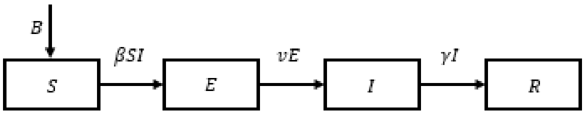
Model penyebaran penyakit telah banyak dibahas, diantaranya Analysis Of Susceptible, Infected, Recovered, Susceptible (Sirs) Model For Spread Of The Acute Respiratory Tract Infectious (ARI) Disease [2], Mathematical Modelling of Seir Type to Controlling Diabetes Mellitus Disease Using Insuling [3]

2. TINJAUANPUSTAKA

Model Epidemik SEIR

Model epidemik pertama kali diperkenalkan oleh Kermack-Mckendrick (1972) yang pada umumnya di bagi menjadi tiga kompartemen, yang dilambangkan dengan S (*Susceptible*), I (*Infectious*) dan R (*Recovered*). Model epidemik kemudian mengalami perkembangan, salah satunya adalah SEIR dengan tambahan kompartemen *Exposed* yang dilambangkan dengan E. Pada umumnya model epidemik diuraikan ke dalam bentuk matematika menggunakan persamaan differensial yang dibangun berdasarkan asumsi.

Berikut adalah bentuk diagram kompartemen model epidemik SEIR.



Gambar 1. Diagram Model Epidemik SEIR

Gambar 1 menunjukkan model epidemik SEIR tanpa adanya kematian. Dimana B adalah laju kelahiran, β adalah laju individu dari *susceptible* ke *exposed*, v adalah laju individu dari *exposed* ke *infectious*, dan γ adalah laju individu dari *infectious* ke *recovered*.

Sistem Persamaan Differensial

Suatu persamaan yang bergantung atau saling berhubungan antara satu fungsi variabel terikat dengan turunan-turunannya terhadap satu atau lebih fungsi variabel bebas disebut dengan persamaan differensial. Sistem persamaan differensial adalah kumpulan dari dua atau lebih persamaan yang saling berhubungan. system persamaan linear dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

dan system persamaan nonlinear dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

Persamaan differensial dapat dibagi menjadi dua yaitu biasa dan parsial [4].

Titik Kesetimbangan dan Kestabilan

Titik kesetimbangan adalah solusi dari suatu persamaan yang tetap atau tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Misalkan terdapat suatu system persamaan differensial yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

maka titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat disebut sebagai titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari persamaan (2.11) jika terpenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Analisis kestabilan berfungsi untuk mengetahui kondisi dari suatu penyakit, agar dapat dilakukan tindak lanjut. Berikut teorema untuk mengidentifikasi sifat kestabilan model di sekitar titik kesetimbangan yang ditinjau dari nilai eigen.

Teorema 2

Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$, dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, mempunyai nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \ldots, \lambda_k (k \leq n)$.

i. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, \ldots, k$.
ii. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ stabil jika dan hanya jika $Re\lambda_i \leq 0$ untuk $i = 1, \ldots, k$ dan jika nilai eigen λ_i imaginer dengan $Re\lambda_i = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
iii. Jika terdapat $Re\lambda_i > 0$ untuk $i = 1, \ldots, k$, maka titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ tidak stabil [5]

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar menunjukkan jumlah individu rentan yang tertular secara langsung oleh individu terinfeksi yang masuk ke dalam populasi individu rentan. Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 yang merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit.

Ada beberapa keadaan yang akan timbul yaitu; [6]

a. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan hilang
b. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap

c. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan menjadi pandemi

Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA)

Infeksi saluran pernapasan akut atau ISPA merupakan penyakit yang menyerang saluran pernapasan yang bersifat akut dan memiliki berbagai macam gejala. Gejala awal dari ISPA adalah suhu badan panas sekitar 38° disertai gejala seperti tenggorokan terasa sakit , nyeri saat menelan, batuk dan sesak napas [7]

ISPA disebabkan oleh bakteri yang meliputi, *Diplococcus pneumoniae, Pneumococcus, Streptococcus pyogenes, Staphylococcus aureus, Haemophilus influenzae,* dan lai-lain. Virus meliputi, influenza, adenovirus, dan sitomegalovirus. Jamur meliputi, *Aspergilus sp., Candida albicans, Histoplasma,* dan lain-lain. Dan aspirasi antara lain, makanan, asap kendaraan, BBM (bahan bakar minyak), minyak tanah, cairan amnion pada saat lahir, benda asing seperti biji-bijian, mainan plastic kecil, dan lain-lain [8].

3. METODOLOGI

Jenis penelitian ini adalah penelitian terapan yang digunakan untuk mengkaji penyakit ISPA dengan jenis data adalah sata sekunder dan sumber data adalah Dinas Kesehatan Bulukumba dan Badan Pusat Statistika. Langkah pertama adalah membangun model matematika berdasarkan asumsi-asumsi yang berkaitan dengan model SEIR berdasarkan karakteristik penyakit, kemudian akan terbentuk diagram dan model matematika yang berbentuk persamaan differensial. Langkah selanjutnya yaitu menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemic dari model yang telah dibentuk sebelumnya, lalu menentukan nilai reproduksi dasar dan menganalisis kestabilan titik kesetimbangan. Kemudian melakukan simulasi menggunakan program model SEIR dari nilai awal dan nilai parameter.

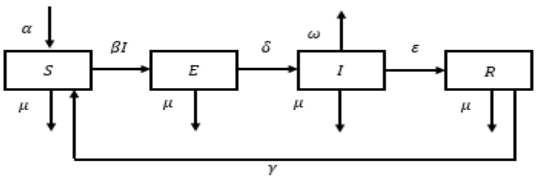
4. PEMBAHASAN

Membangun model SEIR

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk model penyebaran penyakit ISPA, yaitu:

1) Populasi penduduk terbuka.
2) Semua balita yang lahir diasumsikan masuk ke dalam kelompok *Susceptible.*
3) Terdapat kelahiran dan kematian dalam populasi.
4) Penularan penyakit terjadi jika ada kontak langsung antara kelompok *Susceptible* dengan kelompok *Infectious*.
5) Apabila dari kelompok *Susceptible* terdapat individu yang menunjukkan gejala terjangkit maka akan digolongkan kedalam kelompok *Exposed*.
6) Kelompok *Exposed* akan digolongkan kedalam kelompok *Infectious* jika individu telah terinfeksi.
7) Kelompok *Infectious* dapat menularkan penyakit kepada individu yang lain.
8) Individu dari kelompok *Infectious* yang sembuh digolongkan kedalam kelompok *Recovered*.
9) Individu dari kelompok *Recovered* memiliki kekebalan tubuh sementara dan dapat digolongkan kembali ke dalam kelompok *Susceptible*.
10) Pada Kelompok *Infectious* terdapat kematian karena penyakit.

Diagram model SEIR penyakit ISPA



Gambar 2. Diagram Alur Model Penyebaran Penyakit ISPA

Berdasarkan asumsi dan gambar 2 maka model matematika yang terbentuk adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha + \gamma R - (\beta I + \mu)S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - (\delta + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\varepsilon + \mu + \omega)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon I - (\gamma + \mu)R$$

Variabel dan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel dan parameter

Variabel	Keterangan
S	Jumlah individu yang rentan
E	Jumlah individu yang menunjukkan gejala terjangkit
I	Jumlah individu yang telah terinfeksi
R	Jumlah individu yang sembuh
α	Laju kelahiran
β	Laju indivu rentan menjadi individu expose
δ	Laju individu yang terinfeksi
ε	Laju kesembuhan
μ	Laju kematian alami
ω	Laju kematian karena penyakit
γ	Laju penurunan kekebalan tubuh setelah sembuh

Analisis Model SEIR untuk Penyebaran Penyakit ISPA

Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan pada model SEIR akan terjadi pada saat $\left(\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}\right) = (0,0,0,0)$. Terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang dinotasikan dengan E_0 dan titik kesetimbangan endemic yang dinotasikan dengan E_1. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan mengasumsikan $I = 0$ yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit. Berdasarkan persamaan (1) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (S, E, I, R) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0,0,0\right)$. Untuk mengetahui titik kesetimbangan endemik $E_1 = (s, e, i, r)$, diasumsikan $s, e, i, r \neq 0$. Maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh $E_1 = (s, e, i, r)$, dimana

$s = \frac{\delta\mu+\delta\omega+\delta\varepsilon+\mu^2+\mu\omega+\mu\varepsilon}{\beta\delta}$,

$e = \frac{(\varepsilon+\mu+\omega)\left(\delta\beta\alpha-\delta\mu^2-\delta\mu\omega-\delta\mu\varepsilon-\mu^3-\mu^2\omega-\mu^2\varepsilon\right)(\gamma+\mu)}{\delta\beta(\delta\gamma\mu+\delta\mu^2+\delta\gamma\omega+\delta\mu\omega+\delta\mu\varepsilon+\gamma\mu^2+\mu^3+\gamma\mu\omega+\mu^2\omega+\gamma\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon)}$,

$i = \frac{\left(\delta\beta\alpha-\delta\mu^2-\delta\mu\omega-\delta\mu\varepsilon-\mu^3-\mu^2\omega-\mu^2\varepsilon\right)(\gamma+\mu)}{\beta(\delta\gamma\mu+\delta\mu^2+\delta\gamma\omega+\delta\mu\omega+\delta\mu\varepsilon+\gamma\mu^2+\mu^3+\gamma\mu\omega+\mu^2\omega+\gamma\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon)}$

$, r = \frac{\varepsilon\left(\delta\beta\alpha-\delta\mu^2-\delta\mu\omega-\delta\mu\varepsilon-\mu^3-\mu^2\omega-\mu^2\varepsilon\right)}{\beta(\delta\gamma\mu+\delta\mu^2+\delta\gamma\omega+\delta\mu\omega+\delta\mu\varepsilon+\gamma\mu^2+\mu^3+\gamma\mu\omega+\mu^2\omega+\gamma\mu\varepsilon+\mu^2\varepsilon)}$

Reproduksi Dasar (R_0)

Reproduksi dasar (R_0) merupakan ukuran potensi penyebaran penyakit. Dalam mencari nilai R_0 dari penyebaran penyakit ISPA menggunakan *matrix next generation* yang berdasar pada variabel *Exposed* dan *Infectious*. Berdasarkan persamaan variabel E dan I diperoleh:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \delta + \mu & 0 \\ -\delta & \varepsilon + \mu + \omega \end{bmatrix}$$

Maka, $\bar{K} = \bar{F}\bar{V}^{-1}$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{\beta S \delta}{(\delta + \mu)(\varepsilon + \mu + \omega)} & \frac{\beta}{\varepsilon + \mu + \omega} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai Reproduksi dasar (R_0) adalah nilai eigen terbesar dari $\bar{K}$ dengan menggunakan rumus $|\lambda I - \bar{K}| = 0$, sehingga diperoleh nilai $\lambda_1 = \frac{\beta S \delta}{(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu+\omega)}, \lambda_2 = 0$.

Sehingga diperoleh nilai Reproduksi Dasar, yaitu: $R_0 = \frac{\beta\alpha\delta}{\mu(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu+\omega)}$

Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan pelinearan persamaan (1), sehingga diperoleh matriks jacobian untuk kesetimbangan bebas penyakit.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & \gamma \\ 0 & -(\delta + \mu) & \frac{\beta\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + \mu + \omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kestabilan E_0 dengan langkah mencari nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ menggunakan rumus $|\lambda I - J(E_0)| = 0$, diperoleh:

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & \gamma \\ 0 & -(\delta + \mu) & \frac{\beta\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + \mu + \omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda+\mu & 0 & \frac{\beta\alpha}{\mu} & -\gamma \\ 0 & \lambda+\delta+\mu & -\frac{\beta\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & -\delta & \lambda+\varepsilon+\mu+\omega & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & \lambda+\gamma+\mu \end{vmatrix} = 0$$

Dengan menggunkan metode ekspansi kufaktor diperoleh nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 bernilai negatife sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil.

Selanjutnya menentukan kestabilan titik kesetimbangan endemik dengan cara yang sama dengan titik kesetimbangan bebas penyakit. Sehingga diperoleh polynominal orde empat dan semua nilai eigen bernilai negatif sehingga titik kesetimbangan endemik bersifat stabil.

Simulasi Model

Nilai awal untuk setiap variabel sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai Awal Variabel

Variabel	Nilai	Sumber
S	0.9906	Dinas Kesehatan
E	0.0036	Dinas Kesehatan
I	0.00287	Dinas Kesehatan
R	0.00281	Data Asumsi

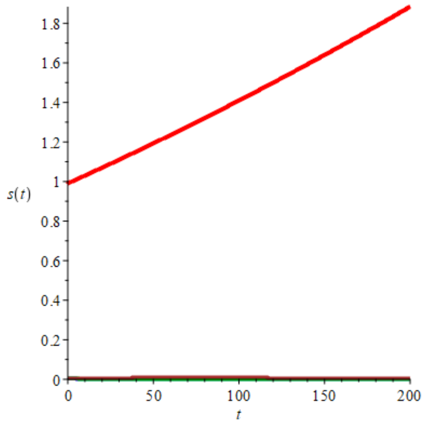
Simulasi menggunakan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
$\boldsymbol{\alpha}$	0.00276	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{\beta}$	0.0187	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{\mu}$	0.0012	Badan Pusat Statistika
$\boldsymbol{\delta}$	0.0714	Data Asumsi
$\boldsymbol{\omega}$	0.00168	Data Asumsi
$\boldsymbol{\varepsilon}$	0.0817	Dinas Kesehatan
$\boldsymbol{\gamma}$	0.0011	Yulita Molliq Rangkuti. 2015

Berdasarkan nilai parameter pada tabel 3 diperoleh nilai $R_0 = 0.5 < 1$, yang berarti individu yang terinfeksi ISPA tidak akan menularkan ke individu yang lain.

Simulasi model SEIR sebagai berikut:



Gambar 3. Proporsi Populasi Model SEIR

Pada gambar 3 menunjukkan bahwa populasi individu exposed, terinfeksi dan sembuh mendekati nol, sedangkan populasi individu rentan mengalami peningkatan setiap tahunnya. Hal ini menunjukkan bahwa penyakit ISPA semakin lama akan menuju E_0, maka seiring berjalannya waktu individu yang terinfeksi ISPA akan hilang dari populasi.

5. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan dari hasil penelitian berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan sebelumnya adalah sebagai berikut:

1. Model penyebaran penyakit ISPA menggunakan Model SEIR sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}00276 + 0{,}0011R - (0{,}0187\, I + 0{,}0012)S$$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}0187\, I\, S - 0{,}0726\, E$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}0714\, E - 0{,}08458\, I$$

$$\frac{dR}{dt} = 0{,}0817\, I - 0{,}0023R$$

2. Diperoleh titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit ISPA di kabupaten Bulukumba, sebagai berikut:
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit
   $$E_0 = (S, E, I, R) = (2.3{,}0{,}0{,}0)$$
   b. Titik kesetimbangan endemik penyakit
   $$E_1 = (S, E, I, R) = (4.6, -0.0696, -0.0588, -2.0883)$$
3. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa populasi individu exposed, terinfeksi dan populasi sembuh akan semakin menurun, sedangkan populasi individu rentan

mengalami peningkatan. Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran penyakit ISPA semakin lama menuju titik E_0, maka seiring berjalannya waktu individu yang terinfeksi ISPA akan hilang dari populasi.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] KEMENKES, Laporan Provinsi Sulawesi Selatan RISKESDAS.:, Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan., 2018.

[2] Rangkuti, M. Yulita and dkk, "Analysis of Suscebtible, infected, Recovered, Susceptible (SIRS) Model For Spread Od Acute Respiratory Tract Infectius (ARI) Disease," in *International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research*, 2015.

[3] Asmaidi, Suryanto and E. Dodi, "Mathematical Modeling of SEIR Type to Controlling Diabetes Mellitus Disease Using Insulin," *Inotera,*, Vols. Vol.2, No.2. , pp. 9-17, 2017.

[4] P. Lawrence, Differential Equations and Dynamical Systems (3rd Edition), New York: Springer, 2001.

[5] G. Olsder , Mathematical Systems Theory (2nd Edition), Belanda: Delft University Press, 1998.

[6] Driessche, P. , Van den and James Watmough, "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria For Compartmental Models Of Disease Transmission," *,Mathematical Bioscience.*, 2002.

[7] Padila and D. , Perawatan Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA) Pada Balita, vol. Vol. 01. No. 01., Jurnal Kesmas Asclepius, 2019, pp. 25-34.

[8] Widoyono, Penyakit Tropis (Epidemiologi, Penularan , Pencegahan, dan Pemberantasannya) Edisi Kedua, Jakarta: Erlangga, 2008.