Aplikasi Model Kerugian Agregat dan Teori Kebangkrutan (*Ruin Theory*) Dalam Penentuan Peluang Kebangkrutan (*Probability of Ruin*)

Sri Dewi Anugrawati
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, sridewi.anugrawati@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Kerugian dalam suatu perusahaan yang sangat berpengaruh pada kemampuan perusahaan itu untuk bertahan (senantiasa beroperasi). Pada artikel ini dibahas mengenai aplikasi model kerugian yang digunakan untuk memprediksi waktu sampai suatu perusahaan akan mengalami kebangkrutan. Model kerugian yang digunakan adalah model kerugian agregat dengan model risiko kolektif. Penentuan waktu sampai kerugian pertama terjadi melibatkan teori kebangkrutan dan model kerugian klaim dengan frekuensi berdistribusi Poison dan keparahan berdistribusi eksponensial, Pareto, dan Gamma

Kata Kunci*: ruin theory, peluang kebangkrutan*

1. PENDAHULUAN

Teori kebangkrutan (*ruin theory*) adalah salah satu topik yang banyak digunakan dalam bidang aktuaria untuk menentukan peluang kebangkrutan suatu perusahaan asuransi dengan melibatkan modal dan pembayaran klaim polis para nasabah (pemegang polis) asuransi.

Penelitian mengenai teori kebangkrutan telah banyak dilakukan oleh berbagai ahli dan peneliti dalam bidang statistika, matematika, dan terkhusus aktuaria. Penelitian yang dilakukan oleh Gerber & Shiu [6] terkait waktu kebangkrutan, surplus seketika saat kebangkrutan dan defisit saat kebangkrutan dengan menggunakan model risiko klasik. Yang dan Sendova [10] juga melakukan kajian terkait waktu kebangkrutan dengan menggunakan persamaan Lundberg dan transformasi Laplace terhadap waktu kebangkrutan tersebut. Ling dan Sendova [9] juga melakukan kajian terhadap waktu kebangkrutan dengan menggunakan model kebangkrutan *compund binomial*. Ling dan Sendova[9] juga mengkaji distribusi gabungan dari variabel waktu kebangkrutan dan jumlah klaim sampai kebangkrutan dengan menggunakan model risiko klasik

Kebangkrutan pada perusahaan umumnya disebabkan karena ketidakmampuan perusahaan memenuhi kewajiban keuangan di waktu yang telah ditentukan. *The Federal Bankcruptcy Act* mendefinisikan kejadian kebangkrutan sebagai saat dimana valuasi properti agregat tidak bisa digunakan untuk membayar utang perusahaan [2]

Banyak dari perusahaan mengalami kebangkrutan dikarenakan tidak ada pemasukan, utang yang bertambah banyak, dan aset yang berkurang. Oleh karena itu analisis risiko terkait kebangkrutan perusahaan dipandang perlu dilakukan kajian yang lebih banyak terutama prediksi terkait kapan suatu perusahaan bisa mengalami kebangkrutan dengan melihat modal atau surplus, aset, dan kewajiban suatu perusahaan.

Pada artikel ini, model risiko yang akan digunakan adalah model risiko klasik dengan fokus pada perusahaan asuransi untuk melihat pekuang terjadinya kebangkrutan pada suatu perusahaan

2. MODEL KEBANGKRUTAN

Modal kebangkrutan yang digunakan pada artikel ini adalah model kebangkrutan ganda dalam B¨uhlmann [3] dan Avanzi[1]

Formula surplus pada model kebangkrutan ganda (*dual ruin model*) didefenisikan sebagai berikut

$$R(t,u) = u - c(t) + S(t), \qquad t \geq 0 \qquad (2.1)$$

Dimana $u > 0$ adalah modal awal atau surplus awal dari perusahaan, $c(t) > 0$ adalah tingkat biaya di waktu ke-t dan $S(t)$ adalah pendapatan agregat dari waktu 0 sampai waktu ke-t. Formula untuk $S(t)$ dituliskan sebagai

$$S(t) = \sum_{t=0}^{N(t)} X_t, \qquad t \geq 0 \qquad (2.2)$$

Dengan X_t adalah besaran klaim (kewajiban yang harus dibayarkan oleh perusahaan di waktu ke-t dan $N(t)$ adalah jumlah kewajiban/klaim di waktu ke-t [3]. Model ini berlaku secara umum pada perusahaan yang sesekali mendapatkan keuntungan dimana jumlah dan besaran keuntungan dapat dimodelkan oleh $S(t)$. Perusahaan asuransi umumnya menggunakan model 2.1 dengan mengasumsikan $c > 0$ sebagai tingkat premi konstan dan $S(t)$ sebagai proses klaim agregat. $S(t)$ dapat diasumsikan sebagai proses Poison majemuk dengan parameter λ dan fungsi kepadatan peluang $p(y), y > 0$ [1]

Distribusi majemuk seperti distribusi Poison majemuk dapat diperoleh dengan menggabungkan 2 distribusi Poison. Menggabungkan dalam hal ini bermakna fungsi pembangkit peluang (*probability generation function*) dari distribusi gabungan tersebut yang dinotasikan dengan $P_S(z)$ dan dituliskan sebagai berikut

$$P_S(z) = P_N\left[P_X(z)\right]$$

dimana $P_N(z)$ dan $P_X(z)$ disebut distribusi primer dan distribusi sekunder. Dalam hal ini jika distribusi sekunder dan primernya adalah distribusi Poison maka $P_S(z)$ berdistribusi Poison majemuk. Dalam ilmu aktuaria, distribusi Poison termasuk dalam distribusi kelas (a, b, 0) dengan fungsi probabilitas

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, ...$$

Teorema 1

Jika distribusi primer adalah anggota dari distribusi kelas (a, b, 0) maka dapat digunakan formula rekursif untuk menghitung

$$g_k = \frac{1}{1 - a \cdot f_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a + \frac{b_j}{k}\right)f_j g_{k-j}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Formula ini disebut formula rekursi Panjer dengan

$$g_0 = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_n f_0^n$$

Bukti: lihat Dickson[5]

Misalkan

$$P_N(z) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k$$

maka

$$\begin{aligned} P_N(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} p_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}\left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1} \\ &= a\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} p_{k-1} + b\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} p_{k-1} \\ &= a\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} p_{k-1} + bP_N(z) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $k = k - 1 + 1$ maka

$$\begin{aligned} P_N\,'(z) &= a\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)z^{k-1}p_{k-1} + a\sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}p_{k-1} + bP_N(z) \\ &= az\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)z^{k-2}p_{k-1} + aP_N(z) + bP_N(z) \\ &= azP_N\,'(z) + aP_N(z) + bP_N(z) \end{aligned}$$

sehingga

$$P_N\,'(z) = a \cdot z \cdot P_N\,'(z) + (a+b)P_N(z)$$

Selanjutnya

$$P_S'(z) = P_N'\left[P_X(z)\right]P_N'(z)$$

Dengan menggunakan persamaan () dan persamaan diatas maka diperoleh

$$P_S'(z) = aP_X(z)P_N'\left[P_X(z)\right] + (a+b)P_N\left[P_X(z)\right]$$

$$P_X'(z)$$

$$= aP_X(z)P_S'(z) + (a+b)P_S(z)P_X'(z)$$

karena P_S dan P_X adalah fungsi pembangkit peluang maka

$$P_S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j g_j$$

dan

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k$$

sehingga

$$P_S'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot z^{j-1} \cdot g_j$$

dan

$$P_X'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{k-1} f_k$$

Oleh karena itu

$$P_S'(z)=\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot z^{j-1}\cdot g_j$$
$$=a\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\cdot f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^{j-1}\cdot g_j\right)$$
$$+(a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\cdot g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot z^{k-1}\cdot f_k\right)$$

Atau jika dikalikan dengan z maka

$$z\cdot P_S'(z)=z\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot z^{j-1}\cdot g_j$$

dimana

$$z\cdot\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot z^{j-1}\cdot g_j=\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot z^j\cdot g_j$$
$$=a\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\cdot f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot z^j\cdot g_j\right)$$
$$+(a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\cdot g_j\right)$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot z^k\cdot f_k\right)$$

Untuk menentukan formula $g_j,\ j=1,2,3,\cdots$ pada persamaan diatas, dapat ditentukan dengan mengidentifikasi koefisien dari z yang berpangkat. Pada sisi kiri koefisien dari z^j adalah $j\cdot g_j$. Pada sisi kanan, perkalian pertama pada jumlahan di sisi kanan dapat ditentukan dengan menggunakan z^j dengan mengalikan z^k pada jumlahan pertama dengan koefisien z^{j-k} pada jumlahan kedua dengan $k=0,1,2,3,\cdots,j$ sehingga diperoleh

$$j\cdot g_j=a\sum_{k=0}^{j} f_k\,(j-k)\,g_{j-k}+(a+b)$$
$$\sum_{k=0}^{j} k\cdot f_j\cdot g_{j-k}$$
$$=a\cdot f_0\cdot j\cdot g_j+a\sum_{k=1}^{j} f_k\,(j-k)\,g_{j-k}$$
$$+(a+b)\sum_{k=0}^{j} k\cdot f_j\cdot g_{j-k}$$

sehingga

$$(1-a\cdot f_0)\cdot j\cdot g_j=\sum_{k=1}^{j}\big(a(j-k)+(a+b)k\big)$$
$$f_k\cdot g_{j-k}$$
$$g_j=\frac{1}{(1-a\cdot f_0)}+\sum_{k=1}^{j}\left(a+\frac{bk}{j}\right)f_j\cdot g_{j-k}$$

Pada model kerugian sebelumnya, peluang kejadian kebangkrutan (*eventual ruin*) dapat diberikan oleh

$$P\big(S(t)>0\big)$$

Dengan model N berdistribusi geometrik. Model peluang kebangkrutan ini sering juga disebut model peluang kebangkrutan Beekman

Definisi 2.1

Kebangkrutan terjadi di waktu t jika $R(t;u)\le 0$ untuk pertama kalinya di waktu ke-t, dengan $t\ge 1$

Definisi 2.2

Jika surplus awal sebesar u maka variabel random $T(u)$ adalah waktu kebangkrutan dimana

$$T(u)=\min\big(t\ge 1: R(t,u)\le 0\big) \qquad (2.3)$$

Hal ini berarti selama terdapat t berhingga sedemikian sehingga $R(t,u)\le 0$ maka kebangkrutan pasti terjadi. Namun perlu diperhatikan bahwa nilai dari $T(u)$ mungkin saja tidak memiliki nilai yang finite sehingga pada kasus ini $T(u)$ dianggap sebagai variabel random yang improper. Untuk menganalisa fungsi surplus sebelumnya, maka kita harus menentukan peluang $T(u)$ memiliki nilai yang finite atau dengan kata lain disebut peluang kebangkrutan ultima

Definisi 2.3

Jika surplus awal sebesar u, peluang kebangkrutan ultima (*probability of ultimate ruin*) yang dinotasikan dengan $\psi(u)$ adalah peluang $T(u)$ bernilai *finite* (berhingga) dimana

$$\psi(u)=\Pr\big(T(u)<\infty\big) \qquad (2.4)$$

Selanjutnya

Definisi 2.4

Jika surplus awal sebesar u, peluang kebangkrutan di waktu ke-t, dinotasikan dengan $\psi(t;u)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\psi(t;u) = \Pr\left(T(u) \le t\right) \qquad (2.5)$$

Kedua peluang tersebut merupakan ukuran risiko kebangkrutan yang sangat penting [11]

3. MODEL RISIKO DISKRIT NON HOMOGEN

Pada model risiko diskrit non homogen, premi diasumsikan tidak seragam dan jumlah klaim memiliki distribusi saling bebas yang tidak stasioner. Didefinisikan $R(0,u) = u \ge 0$. Pada konteks suku bunga, $c(t)$ dan $S(t)$ adalah besaran nilai terdiskon (nilai sekarang) di waktu ke-0.

Jika Y_t adalah total klaim yang terjadi di waktu $[t-1,t]$ dengan kata lain Y_t adalah variabel random non negatif, $c(t) = c_1 + c_2 + \cdots + c_t$, dimana c_t adalah premi terdiskon di waktu ke-t, $a(0)=1$, dan

$$a(t) = \prod_{j=1}^{t}\left(1+i_j\right), \qquad t \ge 0,$$

Jika premi diterima di awal periode, perkembangan surplus suatu perusahaan dapat digambarkan sebagai berikut

$$R(t,u) = u + p_1 - \frac{Y_1}{1+i_1} + \left(p_2 - \frac{Y_2}{1+i_2}\right)\frac{1}{1+i_1} + \cdots + \left(p_t - \frac{Y_t}{1+i_t}\right)\prod_{j-1}^{t-1}\frac{1}{1+i_j}$$

Maka premi

$$c(t) = \frac{p_t}{a(t-1)} \quad (2.6)$$

Jika premi diterima di akhir periode, perkembangan surplus suatu perusahaan dapat digambarkan sebagai berikut

$$R(t,u) = u + \left(p_1 - Y_1\right)\frac{1}{1+i_1} + \left(p_2 - Y_2\right)\frac{1}{1+i_1}\cdot\frac{1}{1+i_2} + \cdots + \left(p_t - Y_t\right)\prod_{j-1}^{t-1}\frac{1}{1+i_j}$$

Maka premi

$$c(t) = \frac{p_t}{a(t)} \qquad (2.7)$$

Jika premi diterima pada tingkat premi seragam per unit waktu, dianggap premi tersebut masuk dalam pertengahan periode. Oleh karena itu perkembangan surplus suatu perusahaan dapat digambarkan sebagai berikut

$$R(t,u) = u + \left[p_1 - \frac{Y_1}{\left(1+i_1\right)^{1/2}}\right]\frac{1}{\left(1+i_1\right)^{1/2}} + \left[p_2 - \frac{Y_2}{\left(1+i_2\right)^{1/2}}\right]\frac{1}{\left(1+i_2\right)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\left(1+i_1\right)} + \cdots + \left(p_t - \frac{Y_t}{\left(1+i_t\right)^{1/2}}\right)\frac{1}{\left(1+i_t\right)^{1/2}}\prod_{j-1}^{t-1}\frac{1}{1+i_j}$$

Maka premi

$$c(t) = \frac{p_t}{a(t-1)\left(1+i_t\right)^{1/2}} \qquad (2.8)$$

Adapun X_t pada persamaan (2.2) berdasarkan persamaan (2.6), (2.7), dan (2.8) dapat didefinisikan sebagai berikut [4]

$$X_t = \frac{Y_t}{a(t)}$$

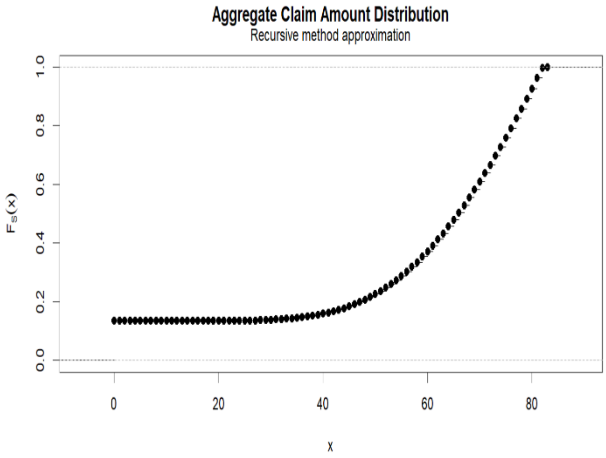
4. KOMPUTASI NUMERIK

Pada bagian ini akan dilakukan komputasi numerik untuk menentukan peluang ruin dengan model Beekman namun frekeunsi klaim menggunakan distribusi Poison lalu ditampilkan pada grafik. Misalkan kejadian klaim berdistribusi Poison dengan $\lambda = 2$ dengan berbagai distribusi keparahan (*severity*) klaim sebagai berikut

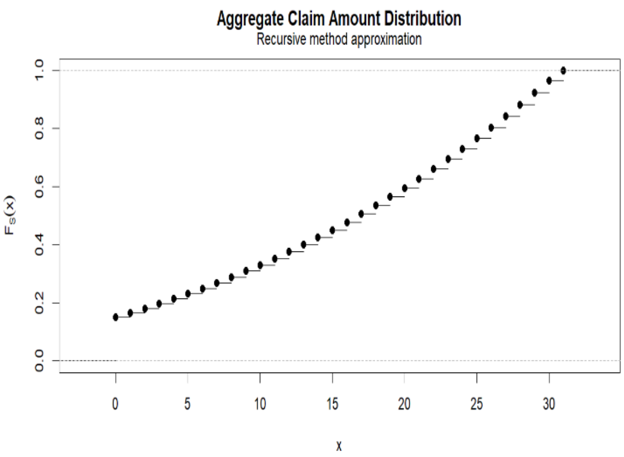
Tabel 4.1 Tabel distribusi klaim dan keparahan klaim

Frekuensi klaim	Keparahan klaim
Poison $(\lambda = 2)$	Gamma$(\alpha = 10,\ \theta = 1)$
	Eksponensial $(\theta = 0,05)$
	Pareto$(\alpha = 10,\ \theta = 0,25)$

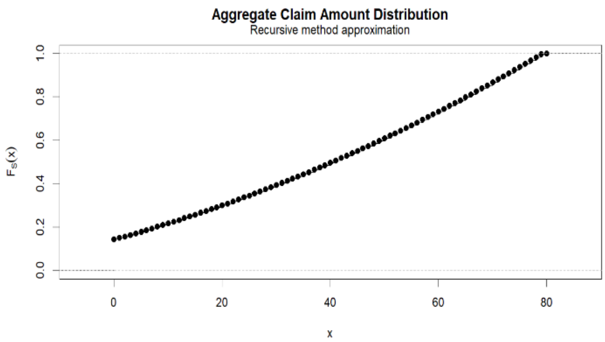
Grafik berikut menggambarkan peluang aggeragat yang diperoleh dari distribusi frekuensi klaim dan keparahan klaim beradasarkan tabel diatas.



Gambar 4.1 Grafik distribusi peluang klaim agregat dengan keparahan klaim bersitribusi gamma

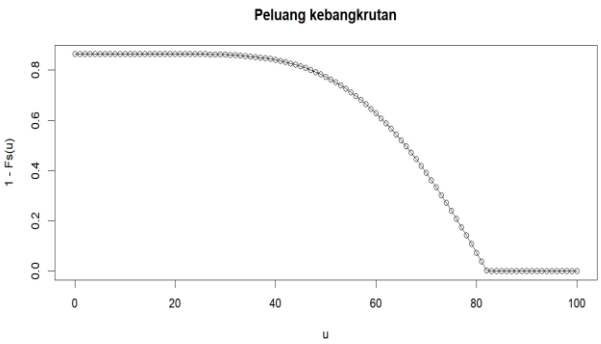


Gambar 4.2 Grafik distribusi peluang klaim agregat dengan keparahan klaim bersitribusi eksponensial



Gambar 4.3 Grafik distribusi peluang klaim agregat dengan keparahan klaim bersitribusi Pareto

Dengan mengggunakan model peluang kebangkrutan Beekman, surplus u bernilai 0 hingga 100, dan rate premi 1,2 maka maka diperoleh grafik peluang kebangkrutan untuk model kerugian agregat dengan keparahan sebelumnya sebagai berikut



Gambar 4.4 Grafik peluang kebangkrutan dengan frekuensi klaim berdistribusi Poison dan keparahan klaim berdistribusi Gamma

5. KESIMPULAN

Risiko klaim memegang peranan penting dalam penentuan peluang kebangkrutan suatu perusahaan. Model surplus yang menjadi dasar penentuan peluang kebangkrutan dapat dibentuk dari biaya atau premi, modal awal ataupun surplus dan model besaran klaim. Distribusi-distribusi dari keparahan klaim dan frekuensi klaim dengan besaran parameter yang berbeda menentukan peluang kebangkrutan yang berbeda pula

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Avanzi, B., U. Gerber, H., & S.W. Shiu, E. (2007). Optimal dividends in the dual

model. Insurance: Mathematics and Economics, 41(1), 111–123. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.10.002

[2] Baxter, N. D. (1967). LEVERAGE, RISK OF RUIN AND THE COST OF CAPITAL. The Journal of Finance, 22(3), 395–403. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1967.tb02975.x

[3] B¨uhlmann, H., 1970. Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[4] Castañer, A., Claramunt, M. M., Gathy, M., Lefèvre, C., & Mármol, M. (2013). Ruin problems for a discrete time risk model with non-homogeneous conditions. Scandinavian Actuarial Journal, (2), 83–102. https://doi.org/10.1080/03461238.2010.546144

[5] Dickson, D. C. M. (2005). Insurance risk and ruin. Insurance Risk and Ruin (pp. 1–229). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511624155

[6] Gerber, H. U., & Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48–72. https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671

[7] Klugman, S. A., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2019). Loss models: from data to decisions, 5th edition. John Wiley & Sons.

[8] Shiu, E. S. W. (1988). Calculation of the probability of eventual ruin by Beekman's convolution series. Insurance Mathematics and Economics, 7(1), 41–47. https://doi.org/10.1016/0167-6687(88)90095-9

[9] Li, S., & Sendova, K. P. (2013). The finite-time ruin probability under the compound binomial risk model. *European Actuarial Journal*, 3(1), 249–271. https://doi.org/10.1007/s13385-013-0063-y

[10] Yang, C., & Sendova, K. P. (2014). The ruin time under the Sparre-Andersen dual model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54(1), 28–40. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.012

[11] Tse, Y. (2009). *Ruin theory. In Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods and Evaluation (International Series on Actuarial Science*, pp. 143-168). Cambridge: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511812156.009