SIR Model Introduction

Muh. Irwan
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, muhirwan@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Model *Susceptible, Infected, dan Recover (SIR) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrik pada tahun 1929.* Hethcote (2000) menyebutkan bahwa pada model SIR populasi di bagi menjadi tiga kompartemen yakni individu yang rentan penyakit (susceptible), individu yang terinfeksi (infected), dan individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (recovered). Tujuan penelitian ini untuk memperkenalkan model SIR secara umum dan implementasinya dalam pemodelan matematika.

***Kata Kunci**: Pemodelan Matematika, Epidemologi, Penyebaran penyakit.*

1. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika dimaksudkan untuk mempelajari penomena-penomena dalam kehidupan sehari-hari. Agar masalah yang ada bisa diselesaikan dengan baik dan benar serta sesuai dengan yang diharapkan. Terdapat 3 langkah yang dilakukan dalam menyelesaiakan masalah yaitu [1],

1. Merumuskan masalah
2. Menyelesaikan masalah
3. Melakukan interpretasi

Secara umum pemodelan matematika dimulai dengan adanya masalah dalam kehidupan sehari-hari yang harus diselesaikan. Untuk menyelesaiakan masalah, harus mempertimbangkan berbagai aspek dengan mengedapankan prinsip algoritma yang diperkenalkan oleh Abu Abdullah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi [2]. Rumusan masalah sebagai Langkah kedua yang disertai dengan berbagai asumsi yang memungkinkan model dapat digunakan se-fleksibel mungkin. Model yang diperoleh dalam bentuk persamaan matematika diselesaikan dengan metode yang sesuai dengan karakteristik persamaan yang solusinya digunakan untuk menafsirkan/menginterpretasikan masalah yang yang telah dirumuskan.

Jika solusi yang diperoleh tidak mampu memberikan gambaran solusi permasalahan yang ada, boleh jadi terdapat permasalahan dalam membuat asumsi. Oleh karena itu, perlu lagi mempertimbangkan asumsi yang telah dibuat. Demikian tahapan secara terus menerus dilakukan dalam pemodelan matematik.

Pemodelan matematika terbagi dalam berbagai bidang diantaranya, bidang ekonomi/keuangan, ekologi, epidemologi/kesehatan, fisika, kimia, dan masih banyak bidang lainnya.

Pada paper ini, diperkenalkan model sederhana dalam bidang epidemologi sebagai dasar pengembangan model yaitu model epidemologi Susceptible, Infected, Recover atau dikenal dengan nama Model SIR. Ilmuwan matematika telah mengembangkan model SIR dalam berbagai model seperti model SEIR, SIRS, SEIRS, SITR, SITRS dan yang lainnya,

2. TINJAUAN PUSTAKA

Model SIR diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrik pada tahun 1929. Hethcote (2000) menyatakan bahwa populasi dalam model SIR dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok individu yang rentan, kelompok individu yang terinfeksi, dan kelompok individu yang sembuh (imunoreaktif sakit) [3].

Adapun alur penyebarannya sendiri, kompartemen rentan adalah orang yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, sehingga individu dalam kompartemen ini berpeluang mudah tertular dan masuk ke dalam kompartemen tertular melalui kontak langsung atau perantara lainnya. Kompartemen terinfeksi adalah sekelompok orang yang telah tertular penyakit dan dapat sembuh dengan pindah kekompartemen R. Kompartemen R adalah kelompok orang yang berhasil sembuh dari penyakit [4].

Matriks

Matriks adalah himpunan bilangar skalar (riil atau kompleks) yang disusun/disejajarkan dalam bentuk persegi panjang (berdasarkan baris dan kolom) [5]. Elemen-elemen matriks bisa berbentuk scalar maupun fungsi. Sebagai contoh;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \vdots\quad \vdots\quad \dots\ \vdots \\ a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Ordo atau ukuran matriks A adalah $m \times n$ dengan m jumlah baris dan n adalah jumlah kolom. Jika jumlah baris matriksnya ada 4 dan kolomnya ada 3, maka disebut matriks berukuran 4×3 yang bermakna jumlan elemen baris tersebut sebanyak 12 unit.

Persamaan Differensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$x = f(x) \qquad (2.2)$$

Dengan

x = $(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt})^T$,

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, dan

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3. METODOLOGI

Langkah yang dilakukan dalam merumuskan model SIR adalah:

1. Merumuskan Model SIR dengan menyertakan parameternya;
2. Melakukan analisis model
   a) Titik kesetimbangan model
   b) Kestabilan titik kesetimbangan
3. Melakukan simulasi

4. PEMBAHASAN

Model SIR

Terdapat 3 kompartemen dalam model SIR yaitu kompartemen susceptible (kelompok individu rentang), kompartemen Infected (kelompok individu terinfeksi) dan kompartemen Recover (kelompok individu sembuh). Alur penyebarannya digambarkan pada bagan berikut:

Gambar 1. Alur Penyebaran model SIR

Kompartemen S atau kelompok individu rentang dapat dipandang sebagai semua individu yang sehat (tergantung penyakit yang dikaji). Bisa berupa bayi, anak-anak, remaja, dewasa. Selain itu, harus diperhatikan bahwa kelompok apa saja yang dapat menambah jumlak kompartemen S (banyak factor bisa dipertimbangkan) seperti laju kelahiran, imigrasi atau yang lainnya.

Pada kompartemen I, jumlah individu dapat bertambah atau berkurang. Bertambahnya junlah individu dapat disebabkan karena adanya interaksi antar individu "rentang" dengan individu "sakit". Selain itu, jika penderita di kompartemen I bersifat tahunan, harus dipertimbangkan juga laju kelahiran yang terjadi. Berkurangnya individu kompartemen I dapat disebabkan karena meninggal, emigrasi, sembuh atau yang lainnya.

Sementara untuk kompartemen R, dapat dipengaruhi oleh kelahiran, kematian, dan individu sembuh. Oleh karena itu, untuk membangun model SIR dibutuhkan asusmsi yang tepat agar model yang terbentuk mewakili abjek kajiannya.

Kasus:

Penggunakan Model SIR pada penyebaran ISPA.

1) Membuat asumsi

Dalam menyederhanakan model untuk penyebaran penyakit ISPA, diberikan asumsi sebagai berikut:

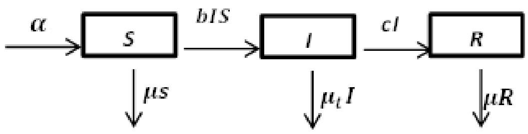
a. Populasi penduduk konstan. Semua bayi yang lahir merupakan Susceptible.

Jumlah populasi Susceptible akan bertambah karena adanya kelahiran individu dengan tingkat kelahiran sebesar (α). Pertambahan dan pengurangan yang disebabkan oleh faktor lain diabaikan. Populasi Susceptible akan berkurang karena adanya kematian alami dengan laju (μ). Kontak langsung dengan individu yang terinfeksi menyebabkan individu pada populasi Susceptible akan terinfeksi dan masuk menjadi kelompok Infectious. Hal ini menyebabkan berkurangnya populasi pada Susceptible. Laju penularan penyakit adalah (b).

b. Kelompok Infectious menyatakan individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada orang lain. Jumlah individu Infectious akan bertambah karena adanya individu Susceptible yang terinfeksi dengan tingkat penularannya sebesar (b). Berkurangnya populasi pada kelompok Infectious ini disebabkan karena adanya kematian yang disebabkan oleh penyakit ISPA dengan laju (π_t). Individu yang terinfeksi penyakit juga dapat sembuh secara spontan dengan laju (c) dan masuk dalam populasi Recovered. Hal ini menyebabkan berkurangnya populasi pada kelompok Infectious.

c. Jumlah individu Recovered akan bertambah karena adanya kesembuhan individu pada kelompok Infectious dengan tingkat kesembuhan sebesar (c). Individu pada kelompok Recovered diasumsikan tidak akan kambuh kembali menjadi penderita penyakit ISPA. Berkurangnya populasi pada kelompok ini disebabkan oleh adanya kematian secara alami dengan laju (μ).

Dari asumsi diatas dapat dibuatkan diagram alur model matematika untuk penyebaran penyakit ISPA, sebagai berikut:



Gambar 2. Diagram Alur Model Penyebaran ISPA.

Berdasarkan asumsi dan Gambar 2, maka model matematika yang terbentuk adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -(bI + \mu)S + \alpha \qquad (4.1)$$

Model persamaan (3.1) menunjukkan bahwa penurunan jumlah individu dalam kelas Susceptible dikarenakan adanya individu pada kelas Susceptible yang terinfeksi penyakit.

$$\frac{dI}{dt} = bIS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)I \qquad (4.2)$$

Model persamaan (4.2) menunjukkan peningkatan jumlah individu dalam kelas Infectious disebabkan adanya individu pada kelas Susceptible yang terinfeksi penyakit. Sedangkan penurunan jumlah individu dalam kelas Infectious dikarenakan adanya individu yang sembuh.

$$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R \qquad (4.3)$$

Model persamaan (4.3) menunjukkan peningkatan jumlah individu dalam kelas Recovered dikarenakan adanya individu yang sembuh.

2) Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan titik kesetimbangan (Titik Ekuilibrium) pada model epidemik SIR diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, dan\ \frac{dR}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dari $\frac{dI}{dt} = 0$ pada persamaan (2) sebagai berikut:

$$bIS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)I = 0$$

$$I(bS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)) = 0$$

$$I = \frac{0}{bS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk Infectious (I)

$$I = 0 \qquad (4.4)$$

Untuk $\frac{dR}{dt} = 0$ subtitusikan persamaan (4.4) ke persamaan (4.3)

$$cI - \mu R = 0$$

$$R = \frac{cI}{\mu}$$

$$R = \frac{c(0)}{\mu}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk Recovered (R)

$$R = 0 \qquad (4.5)$$

Untuk $\frac{dS}{dt} = 0$ subtitusikan persamaan (4.4) ke persamaan (1)

$$-(bI + \mu)S + \alpha = 0$$

$$S = \frac{\alpha}{\mu}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk Susceptible (S)

$$S = \frac{\alpha}{\mu}$$

Dari persamaan (4.4) dan (4.5) didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit:

$$E_0 = (S, I, R) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right).$$

Titik kesetimbangan endemic penyakit dapat diperoleh dari $\frac{dS}{dt} = 0$ dari persamaan (4.1)

$$-(bI + \mu)S + \alpha = 0$$

$$-S(bI + \mu) = -\alpha$$

$$S = \frac{\alpha}{(bI+\mu)} \qquad (4.6)$$

Untuk $\frac{dI}{dt} = 0$ subtitusikan persamaan (4.6) ke persamaan (4.2)

$$bIS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)I = 0$$

$$I = \frac{b\alpha - \mu(\mu_t + c)}{b\mu_t + bc}$$

Sehingga diperoleh untuk nilai Infectious (I)

$$I = \frac{b\alpha - \mu(\mu_t + c)}{b\mu_t + bc} \qquad (4.7)$$

Subtitusikan persamaan (4.7) ke persamaan (4.6) untuk mendapatkan nilai Susceptible (S)

$$S = \frac{\alpha}{(bI + \mu)}$$

$$\frac{\alpha(\mu_t + c)}{b\alpha - \mu(\mu_t + c) + \mu(\mu_t + c)}$$

Sehingga diperoleh untuk nilai Susceptible (S)

$$(S) = \frac{\alpha(\mu_t + c)}{b\alpha - \mu(\mu_t + c) + \mu(\mu_t + c)} \qquad 4.8$$

Untuk $\frac{dR}{dt} = 0$ subtitusikan persamaan (4.7) ke persamaan (4.3)

$$cI - \mu R = 0$$

$$R^* = \frac{cI}{\mu}$$

$$R = c\left(\frac{\frac{b\alpha - \mu(\mu_t + c)}{b(\mu_t + c)}}{\mu}\right)$$

$$R = \frac{abc - \mu c(\mu_t + c)}{\mu b(\mu_t + c)} \qquad (4.9)$$

Dari persamaan (4.6) sampai persamaan (4.9) diperoleh titik kesetimbangan endemic penyakit sebagai berikut:

$E_1 = (S, I, R)$

$$= \left(\frac{\alpha(\mu_t + c)}{b\alpha - \mu(\mu_t + c) + \mu(\mu_t + c)}, \frac{b\alpha - \mu(\mu_t + c)}{b\mu_t + bc}, \frac{abc - \mu c(\mu_t + c)}{\mu b(\mu_t + c)}\right)$$

3) Nilai Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan untuk mengetahui besarnya angka tingkat penyebaran penyakit. Dari persamaan (4.2), diselesaikan menggunakan matriks next generation, diperoleh:

$$\frac{dI}{dt} = bIS - (\boldsymbol{\mu_t} + c)I$$

Untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0) digunakan rumus berikut dengan F merupakan bagian positif dan V merupakan bagian negative sehingga diperoleh:

$$K = FV^{-1} \qquad (4.10)$$

Dari persamaan (4.10) untuk F yang merupakan bagian positif dari $\frac{dI}{dt}$ diperoleh:

$$F = bIS$$

Selanjutnya, F diturunkan terhadap I sehingga diperoleh:

$$F^1 = bS$$

Subtitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit untuk S sehingga diperoleh:

$$F = b\frac{\alpha}{\mu}$$

Dari persamaan (10) untuk V yang merupakan bagian positif dari $\frac{dI}{dt}$ diperoleh:

$$V = (\mu_t + c)I$$

Selanjutnya, V diturunkan terhadap I sehingga diperoleh:

$$V = (\mu_t + c)$$

jadi:

$$V^{-1} = \frac{1}{\mu_t + c}$$

Dari persamaan (4.2) yang diselesaikan menggunakan *next generation matrix*, diperoleh:

$$K = R_0 = \frac{\alpha b}{\mu}\left(\frac{1}{\mu_t + c}\right)$$

$$= \frac{\alpha b}{\mu(\mu_t + c)}$$

Jadi, untuk nilai R_0 diperoleh:

$$R_0 = \frac{\alpha b}{\mu\mu_t + \mu c} \quad (4.11)$$

4) Analisis Kestabilan bebas penyakit

Titik kestabilan bebas penyakit (disease free equilibrium) (S,I,R)= (α/π,0,0) dievaluasi pada matriks Jacobian.

$$J_2 = \begin{bmatrix} -(b(0)+\mu) & -b\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) & 0 \\ b(0) & b\left(\frac{\alpha}{\mu}\right) - \boldsymbol{\mu_t} - c & 0 \\ 0 & c & -\mu \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Untuk mencari nilai eigen (eigen value) λ matriks J_2 yang berukuran 3×3, maka matriks J_2 dituliskan sebagai $(\lambda I - J_2)x = 0$, dengan I adalah matriks identitas, agar λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan $(\lambda I - J_2)x = 0$. Persamaan tersebut mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika:

$$(\lambda I - J_2) = 0$$

Dengan operator aljabar, diperoleh nilai lamda

Tabel 1. Tabel Routh-Hurwitz

λ^3	1	$\mu^2 + 2\mu\mu_t + 2\mu c$
λ^2	$\mu + \mu - \frac{b\alpha}{\mu} + \mu_t + c$	$c - \frac{ba}{\mu} + \mu_t$
λ^1	$\frac{\mu^3+2\mu^2\mu_t+2\mu^2c+\mu^3+2\mu^2\mu_t+2\mu^2c-ba\mu+2ba\mu_t+2abc+\mu^2\mu_t+2\mu\mu_t^2+2\mu c\mu_t+\mu^2c\pm 2\mu\mu_t c+2\mu c^2-\left(c-\frac{ba}{\mu}+\mu_t\right)}{\mu+\mu-\frac{b\alpha}{\mu}+\mu_t+c}$	0
λ^0	$\left(c - \frac{ba}{\mu} + \mu_t\right)$	0

Semua suku pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz harus bertanda positif agar persamaan menjadi stabil, karena koefisien pada persamaan bertanda positif dan lengkap, maka syarat perlu untuk stabil terpenuhi

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, untuk menggunakan SIR model maka dibutuhkan asumsi yang bersesuaian dengan kasus yang dikaji sehingga model dapat menjelaskan permasalahan yang dikaji. Selain itu, dibutuhkan kemampuan analisis aljabar untuk menentukan nilai kestabilan penyakit melalui nilai eigen dan vector eigen.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] R. Haberman, "Matematical Model Mechanical Vibration, Populations Dynamic, and Traffic Flow, United State Of America," Prentice-Hall, , 1998. .

[2] Wink, "Penemu.co," 18 Desember 2020. [Online]. Available: https://penemu.co/penemu-algoritma-al-khawarizmi/. [Accessed 03 Februari 2022].

[3] Gina Puspita, dkk, "Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Karantina Dan Vaksinasi," *(UNNES Journal of Mathematics,* vol. 6(1), 2017)..

[4] I. S. d. H. Tasman, "“ Model pidemik SIR untuk penyakit yang menular secara Horizontal dan Vertikal”,," in *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014*, Surabaya, 2014.

[5] K. Indriani, Matriks, Vektor, Dan Program Linear, Jakarta: Universitas Khatolik Indonesia Atma Jaya, 2019.