Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal

Ermawati

Prodi Studi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM
ermawati@uin-alauddin.ac.id

Siti Fatmasari

Mahasiswa

Program Studi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Try Asizah Nurman

Program Studi Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 4 No. 1
Edisi: Januari – Juni 2016
Artikel No.: 5
Halaman: 33 - 39
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal. Tujuan dalam penelitian ini adalah menentukan bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal, dengan entri bilangan riil. Untuk memperoleh bentuk umum dari determinan matriks toeplitz tridiagonal tersebut dilakukan dengan mengamati pola yang terbentuk dari determinan matriks toeplitz tridiagonal berordo 3×3 hingga 8×8 yang diperoleh dengan menggunakan kombinasi metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor. Bentuk umum $\left|\mathbf{T}_n\right| = \sum_{k=0}^{p}\left(\binom{n-k}{k}(b)^{(n-2k)}(-ac)^k\right)$, $p = \frac{n-1}{2}$, untuk n ganjil dan $p = \frac{n}{2}$, untuk n genap berlaku untuk matriks berordo $n \times n$ dimana $n \geq 3$.

***Kata Kunci**: Matriks Toeplitz Tridiagonal, Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal, Kombinasi Metode Reduksi Baris dan Ekspansi Kofaktor*

1. PENDAHULUAN

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh masyarakat dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika juga merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan lainnya. Matematika memiliki peran yang sangat penting pada ilmu-ilmu pengetahuan lainnya, seperti fisika, kimia, biologi, ekonomi dan lain-lain. Bukan hanya itu, matematika juga merupakan ilmu yang tidak terlepas dari agama.

Dalam teori matriks terdapat berbagai macam bentuk matriks, salah satu diantaranya adalah matriks toeplitz. Matriks toeplitz pada dasarnya memiliki operasi yang sama dengan matriks biasa hanya saja pada matriks toeplitz mempunyai struktur yang khusus, karena setiap entri pada diagonal utama bernilai sama begitupun dengan entri pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga bernilai sama. Ditinjau dari ukurannya, matriks ini merupakan jenis matriks persegi karena memiliki ukuran *n x n* atau dengan kata lain jumlah baris dan kolomnya sama. Telah ada penelitian sebelumnya mengenai matriks toeplitz, yaitu sebuah jurnal tentang "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Bentuk umum dari matriks toeplitz yang digunakan yaitu diagonal nol dan selainnya $x \in \mathbb{R}$. Dalam jurnal tersebut membahas sedikit mengenai matriks toeplitz tridiagonal sebagai salah satu jenis dari matriks toeplitz. Berangkat dari jurnal inilah penulis bermaksud untuk mengkaji lebih dalam lagi mengenai matriks toeplitz tridiagonal.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks, baik matriks biasa maupun matriks toeplitz tridiagonal yaitu menentukan determinan matriks. Determinan memiliki peranan dalam mencari invers matriks dan juga dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, selain itu juga terdapat berbagai macam metode untuk mencari nilai determinan matriks, diantaranya ialah metode sarrus, metode reduksi baris, metode minor dan kofaktor, serta metode corner.

Pada kenyataannya baik reduksi baris maupun ekspansi kofaktor tidak asing lagi bagi penyimak matematika. Apalagi sebagian besar buku-buku aljabar membahas kedua metode ini. Namun, pada umumnya penggunaan metode ini diterapkan secara terpisah. Maka dari itu, penulis bermaksud untuk menggunakan metode yang mengkombinasikan kedua metode ini, karena penggunaan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor secara bersamaan akan menyebabkan perhitungan determinan suatu matriks menjadi lebih mudah.

Berdasarkan uraian di atas, penulis bermaksud untuk melakukan penelitian dengan judul “Bentuk Umum Determinan Matriks Toeplitz Tridiagonal”.

Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan suatu masalah yaitu bagaimana bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal?

Tujuan Penelitian

Dengan adanya permasalahan yang muncul, maka tujuan dari penelitian ini adalah mendapatkan bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Definisi Matriks

Matriks didefinisikan sebagai suatu himpunan angka, variabel atau parameter dalam bentuk suatu persegi panjang, yang tersusun di dalam baris dan kolom. Pada umumnya matriks dinotasikan dalam huruf besar, sedangkan elemen-elemennya dalam huruf kecil.

1. *Matriks Toeplitz Tridiagonal*

Secara sederhana matriks toeplitz dapat didefinisikan sebagai berikut:

1. Berbentuk matriks kuadrat yang simetris berorde *n*
2. Semua unsur pada diagonal utama bernilai sama, dinotasikan dengan

$t_{ij} = t_{i-j}$ untuk $i = j$ dan$i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

3. Semua unsur pada subdiagonal atau unsur diatas diagonal dan dibawah diagonal bernilai sama, dinotasikan dengan $t_{ij} = t_{i-j}$ untuk $i \neq j$ dan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Secara umum dituliskan dalam bentuk

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & & \cdots & t_0 \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

dimana, $t_{ij} = t_{i-j}$ dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Matriks toeplitz merupakan suatu matriks yang setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga sama. Oleh karena itu diasumsikan bahwa terdapat berbagai jenis dari matriks toeplitz. Salah satu jenis dari matriks toeplitz adalah matriks toeplitz tridiagonal. Andaikan **A** suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \vdots & 0 \\ c & b & a & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & c & b \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

di mana $a \neq 0$ dan $c \neq 0$ pada (2.2).

Jenis lain dari matriks toeplitz adalah matriks toeplitz dengan diagonal nol dan selainnya $x \in \mathbb{R}$, sebagaimana yang digunakan Bakti Siregar dalam penelitiannya.

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2.3)$$

2. *Determinan Matriks*

Suatu determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengasosiasikan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujur sangkar.

Determinan adalah suatu skalar (angka) yang diturunkan dari suatu matriks bujur sangkar melalui operasi khusus. Disebut operasi khusus karena dalam proses penurunan determinan dilakukan perkalian-perkalian sesuai dengan aljabar matriks. Suatu matriks yang mempunyai determinan disebut dengan matriks *singular* sedangkan matriks yang tidak mempunyai determinan (determinannya = 0) disebut matriks *non singular.*

Determinan matriks **A** dengan ukuran $n \times n$ (matriks persegi). Determinan, dinotasikan dengan $\det(\mathbf{A})$, didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks **A**.

3. *Reduksi Baris dan Ekspansi Kofaktor*

a. *Reduksi Baris*

Gagasan dari metode ini adalah dengan mereduksi matriks yang diberikan menjadi bentuk segitiga atas melalui operasi baris elementer, kemudian menghitung determinan dari matriks segitiga atas, kemudian menghubungkan determinan tersebut dengan matriks aslinya.

Reduksi baris dilakukan melalui operasi baris elementer (OBE). Dalam OBE ini ada beberapa operasi yang dapat digunakan, yaitu:

a. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tidak sama dengan nol;
b. Mempertukarkan dua baris
c. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

b. *Ekspansi Kofaktor*

Ekspansi kofaktor adalah suatu metode yang digunakan untuk menghitung determinan dari suatu matriks, yang selanjutnya dapat dikembangkan untuk menentukan invers matriks tersebut dan akhirnya membantu untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear. Sebelum membahas kofaktor, terlebih dahulu mendefinisikan minor sebagai suatu cara untuk menghitung determinan dengan cara manual.

Determinan dari matriks 3×3,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

adalah jumlah

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (2.4)$$

Dengan mengatur kembali suku-suku dan memfaktorkan, (2.4) dapat ditulis kembali sebagai:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \qquad (2.5)$$

Pernyataan dalam kurung pada (2.5), masing-masing merupakan determinan:

$$\mathbf{M_{11}} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M_{12}} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M_{13}} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Maka definisi minor dan kofaktor, yaitu:

Jika **A**adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai $\mathbf{M_{ij}}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari **A**. Bilangan $(-1)^{i+j}\mathbf{M_{ij}}$ dinyatakan sebagai $\mathbf{C}_{ij}$ dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Definisi: (Matriks Kofaktor)

Jika **A** adalah sembarang matriks $n \times n$ dan C_{ik} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks dengan bentuk:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

dinamakan matriks kofaktor dari matriks **A**.

Menurut definisi minor dan kofaktor di atas, pernyataan dalam (2.5) dapat ditulis dalam bentuk minor dan kofaktor sebagai:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(\mathbf{M_{11}}) + a_{12}(-\mathbf{M_{12}}) + a_{13}(\mathbf{M_{11}})$$
$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) menunjukkan bahwa determinan **A**dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada baris pertama dari **A** dengan kofaktor-kofaktornya yang bersesuaian dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh. Metode perhitungan $\det(\mathbf{A})$ ini disebut ekspansi kofaktor (*cofactor expansion*) sepanjang baris pertama dari **A**.

Ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan matriks adalah mengikuti teorema (ekspansi kofaktor):

Apabila diberikan matriks **A** yang berukuran $n \times n$, maka determinan matriks **A** dapat dihitung dengan menggunakan:

a. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom j:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

b. Ekspansi kofaktor sepanjang baris i:

3. METODE PENELITIAN

Untuk mencapai tujuan dalam penelitian, maka ada 2 tahapyang dilakukanuntuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonaladalah sebagai berikut:

Tahap I: Mencari determinan matriks toeplitz tridiagonal ordo 3×3 hingga 8×8 dengan kombinasi metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Membentuk matriks toeplitz tridiagonalyang akan dicari determinannya.
2. Mereduksi matriks yang diberikan melalui operasi baris elementer hingga terdapat suatu baris atau kolom yang banyak memuat entri nol (hanya satu yang bukan nol)
3. Melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom yang memuat nol terbanyak
4. Mengulangi langkah 2dan 3 hingga terbentuk matriks 2×2.

Melakukan perhitungan determinan (sesuai dalam persamaan (2.11)).

Tahap II: Membuat bentuk umum penyelesaian determinan matriks toeplitz tridiagonal melalui proses pengamatan pola yang terbentuk dari determinan yang telah diperoleh.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Hasil Penelitian*

Pada penelitian ini, ada 2 tahap yang dilakukan dalam menentukan bentuk umum penyelesaian determinan matriks dengan menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Tahap I: Mencari determinan matriks toeplitz tridiagonal ordo 3×3 hingga 8×8 dengan kombinasi metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Matriks ordo 3×3 $(n = 3)$

Membentukmatriks toeplitz tridiagonalyang akandicarideterminannya.

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & b & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$$

Mereduksi matriks yang diberikan melalui operasi baris elementer hingga terdapat suatu baris atau kolom yang banyak memuat entri nol (hanya satu yang bukan nol). Langkah pertama yang dikerjakan ialah menjadikan 0 di bawah b pada kolom pertama dengan cara baris kedua ditambahkan dengan $-\frac{c}{b}$ dikalikan dengan baris pertama, dapat ditulis dengan rumus $B_2 + \left(-\frac{c}{b} \times B_1\right)$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & b & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} B_2 + \left(-\frac{c}{b} \times B_1\right)$$

Maka hasilnya adalah:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ 0 & \frac{b^2-ac}{b} & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom yang banyak memuat entri nol karena perkalian entri nol dengan kofaktornya akan menghasilkan nol. Pada kasus ini dipilih ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dengan rumus $a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$

$$\det \mathbf{T}_3 = b \times (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} \frac{b^2-ac}{b} & a \\ c & b \end{bmatrix} + \left(0 \times C_{21}\right) + \left(0 \times C_{31}\right)$$

Selanjutnya melakukan perhitungan determinan matriks ordo 2×2

$$\det \mathbf{T}_3 = b \times \left\{ b \times \left(\frac{b^2-ac}{b} \right) - \left(a \times c\right) \right\}$$

$$\det \mathbf{T}_3 = b \times (b^2 - 2ac)$$

Sehingga hasilnya adalah:

$$\det \mathbf{T}_3 = b^3 - 2bac$$

b. Matriks ordo 4×4 $(n = 4)$

Membentukmatriks toeplitz tridiagonalyang akandicarideterminannya.

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}$$

Mereduksi matriks yang diberikan melalui operasi baris elementer hingga terdapat suatu baris atau kolom yang banyak memuat entri nol (hanya satu yang bukan nol). Langkah pertama yang dikerjakan ialah menjadikan 0 di bawah b pada kolom pertama dengan cara baris kedua ditambahkan dengan $-\frac{c}{b}$ dikalikan dengan baris pertama, dapat ditulis dengan rumus $B_2 + \left(-\frac{c}{b} \times B_1 \right)$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \end{bmatrix} B_2 + \left(-\frac{c}{b} \times B_1 \right)$$

maka hasilnya adalah:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2-ac}{b} & a & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom yang banyak memuat entri nol karena perkalian entri nol dengan kofaktornya akan menghasilkan nol. Pada kasus ini dipilih ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dengan rumus $a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}$

$$\det \mathbf{T}_4 = b \times (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} \frac{b^2-ac}{b} & a & 0 \\ c & b & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} + \left(0 \times C_{21}\right) + \left(0 \times C_{31}\right) + \left(0 \times C_{41}\right)$$

Selanjutnya, karena matriks yang diperoleh belum berupa matriks ordo 2×2 maka proses mereduksi baris masih dilakukan, yaitu menjadikan 0 di atas $b$pada kolom ketiga dengan cara baris kedua ditambahkan dengan $-\frac{a}{b}$ dikalikan dengan baris ketiga, dapat ditulis dengan rumus $B_2 + \left(-\frac{a}{b} \times B_3 \right)$

$$\det \mathbf{T}_4 = b \times (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} \frac{b^2-ac}{b} & a & 0 \\ c & b & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} B_2 + \left(-\frac{a}{b} \times B_3 \right)$$

$$\det \mathbf{T}_4 = b\begin{bmatrix} \dfrac{b^2-ac}{b} & a & 0 \\ c & \dfrac{b^2-ac}{b} & 0 \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$$

Kemudian melakukan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga karena banyak memuat entri nol, dengan rumus $a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$

$$\det \mathbf{T}_4 = b\times\left(\left(0\times C_{13}\right)+\left(0\times C_{23}\right)+b\times(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} \dfrac{b^2-ac}{b} & a \\ c & \dfrac{b^2-ac}{b}\end{bmatrix}\right)$$

Selanjutnya melakukan perhitungan determinan matriks ordo 2×2

$$\det \mathbf{T}_4 = b^2 \times \left\{\left(\left(\frac{b^2-ac}{b}\right)\times\left(\frac{b^2-ac}{b}\right)\right)-\left(a\times c\right)\right\}$$

$$=\left(b^2\times\frac{\left(b^2-ac\right)^2}{b^2}\right)-\left(b^2\times ac\right)$$

$$=\left(b^2-ac\right)^2-\left(b^2ac\right)$$

$$\det \mathbf{T}_4 = b^4-2b^2ac+a^2c^2-b^2ac$$

Sehingga hasilnya adalah:

$$\det \mathbf{T}_4 = b^4-3b^2ac+a^2c^2$$

Dengan cara yang sama pada matriks 3 x 3, 4 x 4 diperoleh determinan untuk matriks 5 x 5 6 x 6, 7 x 7, dan 8 x 8 secara berturut-turut sebagai berikut:

$$\det \mathbf{T}_5 = b^5-4b^3ac+3ba^2c^2$$

$$\det \mathbf{T}_6 = b^6-5b^4ac+6b^2a^2c^2-a^3c^3$$

$$\det \mathbf{T}_7 = b^7-6b^5ac+10b^3a^2c^2-4ba^2c^3$$

$$\det \mathbf{T}_8 = b^8-7b^6ac+15b^4a^2c^2-10b^2a^3c^3+a^4c^4$$

Tahap II: Membuat bentuk umum penyelesaian determinan matriks toeplitz tridiagonal.

Dari urutan determinan matriks yang diperoleh pada tahap I di atas membentuk suatu pola sehingga diperoleh bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal ordo $n \times n$ untuk $n \geq 3$, yaitu:

Misalkan T_n suatu matriks toeplitz tridiagonal berordo $n \times n$ maka determinan matriks T_n adalah:

$$\left|\mathbf{T}_n\right| = \sum_{k=0}^{p}\left(\binom{n-k}{k}(b)^{(n-2k)}(-ac)^k\right),\ \text{dimana}$$

$p=\dfrac{n-1}{2}$, untuk n ganjil dan

$p=\dfrac{n}{2}$, untuk n genap

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika, andaikan T_n adalah matriks toeplitz tridiagonal dengan ordo $n \times n$ dimana $n \geq 3$ yakni $\{3, 4, 5, \dots, n\}$.

a. Untuk n ganjil $(n = 3, 5, \dots, m)$, maka $p=\dfrac{n-1}{2}$

   Jadi, bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal ordo $n \times n$ dengan n bilangan ganjil adalah:

$$\left|T_n\right| = \sum_{k=0}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\binom{n-k}{k}(b)^{(n-2k)}(-ac)^k\right)$$

$$= b^n + \left(n-1\right)b^{(n-2)}(-ac)+\cdots$$

$$+\left(\frac{n+1}{2}\right)b\left(-ac\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

   Untuk $n = 3$ maka

$$\left|\mathbf{T}_3\right| = \sum_{k=0}^{1}\left(\binom{3-k}{k}(b)^{(3-2k)}(-ac)^k\right) = b^3-2bac$$

Untuk $n = 5$ maka

$$\left|\mathbf{T}_5\right| = \sum_{k=0}^{2}\left(\binom{5-k}{k}(b)^{(5-2k)}(-ac)^k\right) = b^5-4b^3ac+3ba^2c^2$$

Untuk $n = m$ maka

$$\left|\mathbf{T}_m\right| = \sum_{k=0}^{\left(\frac{m-1}{2}\right)} \left(\binom{m-k}{k} (b)^{(m-2k)} (-ac)^k \right)$$

$$= b^m + (m-1)b^{(m-2)}(-ac) + \cdots + \left(\frac{m+1}{2}\right) b(-ac)^{\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

Sehingga deretan untuk n ganjil adalah:

$$\left(b^3 - 2bac\right) + \left(b^5 - 4b^3ac + 3ba^2c^2\right) + \cdots + \left(b^m + (m-1)b^{(m-2)}(-ac) + \cdots + \left(\frac{m+1}{2}\right) b(-ac)^{\left(\frac{m-1}{2}\right)} \right)$$

$$= \sum_{n=3}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(\binom{n-k}{k} (b)^{(n-2k)} (-ac)^k \right) \right)$$

Untuk membuktikan determinan matriks teplitz tridiagonal ordo n x n untuk setiap n bilangan ganjil dan $n \geq 3$ dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

b. Untuk n genap $(n = 4, 6, \ldots, m)$, maka $p = \frac{n}{2}$

Jadi, bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal ordo $n \times n$ dengan n bilangan genapl adalah:

$$\left|\mathbf{T}_n\right| = \sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\binom{n-k}{k} (b)^{(n-2k)} (-ac)^k \right)$$

$$= b^n + (n-1)b^{(n-2)}(-ac) + \cdots + b(-ac)^{\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Untuk $n = 4$ maka

$$\left|\mathbf{T}_4\right| = \sum_{k=0}^{2} \left(\binom{4-k}{k} (b)^{(4-2k)} (-ac)^k \right)$$

$$= b^4 - 3b^2ac + a^2 + c^2$$

Untuk $n = 6$ maka

$$\left|\mathbf{T}_6\right| = \sum_{k=0}^{3} \left(\binom{6-k}{k} (b)^{(6-2k)} (-ac)^k \right)$$

$$= b^6 - 5b^4ac + 6b^2a^2c^2 + a^3c^3$$

Untuk $n = m$ maka

$$\left|\mathbf{T}_m\right| = \sum_{k=0}^{\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\binom{m-k}{k} (b)^{(m-2k)} (-ac)^k \right)$$

$$= b^m + (m-1)b^{(m-2)}(-ac) + \cdots + (-ac)^{\left(\frac{m}{2}\right)}$$

Sehingga deretan untuk n genap adalah:

$$\left(b^4 - 3b^2ac + a^2 + c^2\right) + \left(b^6 - 5b^4ac + 6b^2a^2c^2 + a^3c^3\right) + \cdots + \left(b^m + (m-1)b^{(m-2)}(-ac) + \cdots + (-ac)^{\left(\frac{m}{2}\right)} \right)$$

$$= \sum_{n=3}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\binom{n-k}{k} (b)^{(n-2k)} (-ac)^k \right) \right)$$

Untuk membuktikan determinan matriks teplitz tridiagonal ordo n x n untuk setiap n bilangan genap dan $n \geq 4$ dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari hasil penelitian dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa bentuk umum determinan matriks toeplitz tridiagonal adalah:

$$\left|\mathbf{T}_n\right| = \sum_{k=0}^{p} \left(\binom{n-k}{k} (b)^{(n-2k)} (-ac)^k \right),$$ dimana

$p = \frac{n-1}{2}$, untuk n ganjil dan

$p = \frac{n}{2}$, untuk n genap

berlaku untuk matriks berordo $n \times n$ dimana $n \geq 3$.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga. 1997.

Anton, Howard dan Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra*. Terj. Refina Indriasari dan Irzam Harmein, *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi*. Ed. 8. Jakarta: Erlangga. 2004.

Clapham, Christopher dan James Nocholson. *Oxford: Concise Dictionary Of Mathematics*. New York: Oxford University Press. 2009.

Departemen Agama RI. *Al-Qur'an Tajwid dan Terjemah*. Bandung: CV Penerbit Diponegoro. 2010.

Hadley, G. *Linear Algebra.* Terj. Naipospos dan Noeniek Soemartoyo, *Aljabar Linear.* Jakarta: Erlangga. 1983.

Hamka. *Tafsir Al Azhar: Juzu' 30*. Singapura: Pustaka Pte Ltd. 1989.

Imrona, Mahmud. *Aljabar Linear Dasar*, ed. Lemeda Simarmata. Jakarta: Erlangga. 2009.

Kusumawati, Ririen. *Aljabar Linear & Matriks.* Cet. I; Malang: UIN-Malang Press. 2009.

Negoro, St dan B. Harahap. *EEnsiklopedia Matematika*. Bogor: Ghalia Indonesia. 2005.

Nuryadin, Riki Cukil. "Norm Matriks Pada Himpunan Dari Matriks-matriks Toeplitz", http:// www. *a-research.upi.edu/operator/upload/s_d015 1_044225 _chapter1.pdf* (03 Mei 2015).

Pudjiastuti. *Matriks: Teori dan Aplikasi.* Cet. I; Yogyakarta: Graha Ilmu. 2006.

Purwanto, Heri, dkk. *Aljabar Linear.* Jakarta: PT. Ercontara Rajawali. 2005.

Santosa, Gunawan. *Aljabar Linear Dasar*. Yogyakarta: ANDI. 2009. Gunawan, Santosa. *Aljabar Linear Dasar*. Yogyakarta: ANDI. 2009.

Shihab, M. Quraish. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Kesetaraan Al-Qur'an.* Jakarta: Lentera Hati. 2002.

Siregar, Bakti, dkk. "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". *Saintia Matematika* 02, no. 01 (2014): h. 85-94.