HIMPUNAN BILANGAN KOMPLEKS YANG MEMBENTUK GRUP

WAHIDA A. Wahyuni Abidin Wahdaniah

Jurusan Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Jurusan Matematika,
Fakultas Sains dan Teknologi, UINAM

Info:

Jurnal MSA Vol. 2 No. 2
Edisi: Juli – Des 2014
Artikel No.: 3
Halaman: 14 - 27
ISSN: 2355-083X
Prodi Matematika UINAM

ABSTRAK

Bilangan riil banyak digunakan dalam menyelesaikan pembuktian sifat-sifat grup. Kemudian sifat-sifat grup tersebut akan dikaji dengan menggunakan himpunan bilangan kompleks. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup atau bukan grup. Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian murni (kajian teori). Hasil penelitian yang diperoleh adalah himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup dapat dilihat pada bentuk atau operasi tertentu yaitu penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks dapat membentuk grup misalnya pada $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi $(\mathbb{C}, +)$ dan $(\mathbb{C},\times)$, $\mathbb{C} = \{\bar{z}|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian konjugat, $\mathbb{C} = \{|z|\ |z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi perkalian modulo, $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z}\,|\ z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ dengan operasi $(\mathbb{C}, +)$ dan $(\mathbb{C},\times)$, $\mathbb{C} = \left\{z|z = x + iy\sqrt{2}\,; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ dengan operasi penjumlahan, $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; |x + iy| = 1; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi perkalian..

Kata Kunci: Bilangan kompleks, grup dan sifat-sifat grup

1. PENDAHULUAN

Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya dan merupakan salah satu ilmu bantu yang sangat penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan sarana berfikir untuk menumbuhkembangkan pola pikir logis, sistematis, obyektif, kritis, dan rasional. Oleh sebab itu, matematika harus mampu menjadi salah satu sarana untuk meningkatkan daya nalar dan dapat meningkatkan kemampuan dalam mengaplikasikan ilmu untuk menghadapi tantangan hidup dalam memecahkan masalah. Matematika juga digunakan untuk memecahkan masalah pada teori matematika itu sendiri. Salah satunya adalah dalam ilmu aljabar yang khususnya mengenai sifat-sifat grup yang himpunannya pada bilangan kompleks.

Himpunan adalah kumpulan objek yang dapat didefenisikan secara jelas. Dalam Q.S. Al-Hujurat/49:13 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ
وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ
عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ

Terjemahnya: “Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal”.

Kata *syu’ub* adalah bentuk jamak dari kata *Sya’b.* Kata ini digunakan untuk menunjuk kumpulan dari sekian *Qabilah* yang biasa diterjemahkan suku yang merujuk kepada satu kakek. *Qabilah* pun terdiri dari sekian banyak kelompok keluarga yang dinamai *imarah*, dan yang ini terdiri lagi dari sekian banyak kelompok yang dinamai *bathn*. *Bathn* ada sekian *fakhdz* hingga akhirnya sampai pada himpunan keluarga kecil. Berdasarkan ayat di atas dapat dikatakan bahwa bukan dalam matematika saja himpunan dapat dijelaskan tetapi himpunan telah lebih dahulu dijelaskan dalam Al-quran berdasarkan ayat tersebut di atas karena himpunan didefinisikan sebagai kumpulan dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya saling mengenal.

Ilmu aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan, dan sifat struktur-struktur di dalamnya. Salah satu yang dibahas dalam ilmu aljabar abstrak adalah struktur aljabar dan sifat-sifatnya. Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan aksioma dan suatu operasi biner. Teori grup dan ring merupakan konsep yang memegang peranan penting dalam struktur aljabar. Grup hanyalah sebuah objek formal di matematika. Secara teoretis, perannya mencakup: studi tentang simetri, pondasi kriptograf, aljabar modern, dan banyak lagi. Sebagai objek tersendiri, grup cukup menantang untuk diklasifikasi. Faktanya, beberapa bagian terdalam matematika terkait secara langsung maupun tidak langsung dengan salah satu pengklasifikasian grup.

Ide dasar munculnya teori grup adalah penyelidikan permutasi dari himpunan berhingga di dalam teori persamaan. Selanjutnya ditemukan bahwa konsep dari suatu grup adalah universal dan konsep grup tersebut muncul di berbagai cabang ilmu matematika dan ilmu pengetahuan.

Secara umum, penyelesaian soal-soal yang berhubungan dengan sifat-sifat grup hanya mengutamakan bilangan riil, baik itu dari buku-buku, jurnal maupun kajian-kajian terkait dengan sifat-sifat grup. Selanjutnya, penulis ingin mengkaji himpunan bilangan kompleks dengan menggunakan sifat-sifat grup, sebab berbagai kajian terkait sifat-sifat grup yang telah diperoleh belum ada yang membahas tentang sifat-sifat grup dalam kaitannya pada himpunan bilangan kompleks.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis tertarik mengangkat sebuah judul "Mengkaji Himpunan Bilangan Kompleks yang dapat Membentuk Grup".

Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dikemukakan rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup atau bukan grup?

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui himpunan bilangan kompleks yang membentuk grup atau bukan grup.

2. TINJAUAN PUSTAKA

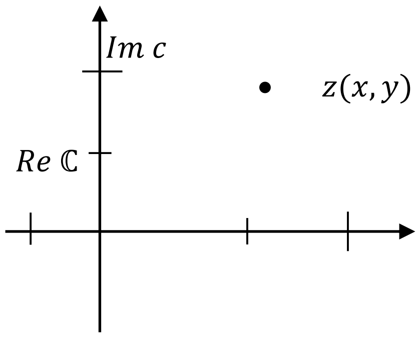
Bilangan Kompleks

Dengan memiliki sistem bilangan real saja kebutuhan orang akan bilangan belum dapat tercukupi karena untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ selalu berlaku $x^2 \geq 0$, maka kalau hanya bekerja di dalam $\mathbb{R}$, persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0$ tidak memiliki solusi dalam system bilangan riil. Dalam hal ini solusinya adalah $x = \pm\sqrt{-1}$. Jelas $\sqrt{-1}$ bukan bilangan riil karena tidak ada bilangan riil yang kuadratnya sama dengan -1. Jadi di samping bilangan riil kita telah memiliki jenis bilangan lain, yaitu bilangan imajiner. Bilangan imajiner adalah bilangan yang dapat ditulis sebagai bi dengan $0 \neq b \in \mathbb{R}$. Misalkan, saat memerlukan solusi dari persamaan $x^2 = -25$, tidak ada bilangan riil yang memenuhi persamaan tersebut karena solusi persamaan tersebut adalah $x = \sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1} = 5i$. Oleh karena itu perlu didefinisikan bilangan kompleks.

Gabungan bilangan riil dan bilangan imajiner membentuk bilangan kompleks dengan notasi $\mathbb{C}$. Himpunan bilangan kompleks ditulis

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\},$$

Dengan a adalah bagian riil dan b bagian imajiner. Bilangan kompleks ditulis sebagai pasangan terurut dua bilangan riil, yang dinyatakan dengan (a, b) atau $a + bi$, dimana $a = Re\,\mathbb{C}$ (bilangan riil dari bilangan kompleks), $b = Im\,\mathbb{C}$ (bagian imajiner dari bilangan kompleks). Jika bilangan riil dapat ditempatkan pada garis lurus, maka bilangan kompleks ditempatkan pada bidang $\mathbb{R}^2$ atau dalam hal ini disebut bidang kompleks (lihat grafik).



Gambar 2.1. Grafik Bilangan Kompleks

Berdasarkan bagan di atas dapat dilihat bahwa himpunan bilangan yang terbesar dalam matematika adalah bilangan kompleks.

Himpunan bilangan kompleks umumnya dinotasikan dengan C atau $\mathbb{C}$. Bilangan real $\mathbb{R}$ dapat dinyatakan sebagai bagian dari himpunan $\mathbb{C}$ dengan menyatakan setiap bilangan real sebagai bilangan kompleks.

Definisi 2.1
Diberikan bilangan kompleks $z_n = (x_n, y_n)$ $n = 1,2,...$ operasi pada bilangan kompleks didefinisikan dengan

1. $z_1 = z_2$ jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$
2. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
3. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
4. $kz_1 = (kx_1, ky_1)$ k konstanta riil
5. $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Himpunan semua pasangan terurut (x,y) dengan operasi tertentu yang sesuai padanya didefinisikan sebagai sistem bilangan kompleks. Sistem bilangan kompleks tersebut dinotasikan $(\mathbb{C},+)$.

Teorema 2.2. *Sistem bilangan kompleks* $(\mathbb{C},+)$ *merupakan suatu lapangan (field).*

Definisi 2.3 . *Diberikan bilangan kompleks* $\boldsymbol{z_n = x_n + iy_n,\ n = 1,2}$. *Operasi pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan dengan*

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
3. $kz_1 = kx_1 + ky_1, k \in \mathbb{R}$
4. $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
5. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 {z_2}^{-1}, z_2 \neq 0$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{{x_2}^2 - {y_2}^2}$$

Selain operasi penjumlahan dan perkalian pada sistem bilangan kompleks, masih terdapat operasi lain yang dinamakan operasi konjuget. Operasi konjuget didefinisikan seperti dibawah ini.

Definisi 2.4. *Diberikan bilangan kompleks* $\boldsymbol{z = x + iy}: \boldsymbol{x, y} \in \mathbb{R}$. *Bilangan kompleks sekawan (konjuget) dari z didefinisikan dengan* $\boldsymbol{\bar{z} = x - iy}$. *Operasi konjuget (bilangan kompleks sekawan) pada sistem bilangan kompleks disajikan pada teorema berikut.*

Teorema 2.5. *Diberikan* $\boldsymbol{z_1, z_2} \in \mathbb{C}$. *Operasi konjuget pada sistem bilangan kompleks adalah*

a. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
b. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.
c. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
d. $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2, z_2 \neq 0$.
e. $\bar{\bar{z}} = z$.
f. $z\bar{z} = [Re(z)]^2 + [Im(z)]^2$.
g. $z + \bar{z} = 2Re(z)$.
h. $z - \bar{z} = 2i\ Im(z)$.

Operasi Biner pada Himpunan

Misalkan G himpunan tidak kosong, fungsi dari $G \times G$ ke G mengaitkan setiap pasangan berurutan $(a,b) \in G \times G$ dengan suatu pasangan di G (yaitu $a * b \in G$), maka $*$ dikatakan operasi biner (komposisi biner) pada G. Dengan demikian, operasi $*$ pada himpunan tidak kosong G adalah operasi biner jika dan hanya jika $a \in G, b \in G \rightarrow a * b \in G, \forall\, a, b \in G$ Jadi operasi biner merupakan operasi tertutup yang didefenisikan pada himpunan tidak kosong.

Contoh 2.1

Operasi penjumlahan $(+)$ merupakan komposisi biner pada himpunan bilangan asli N, karena $\forall a, b \in N, a + b \in N$

Defenisi 2.7 (hukum operasi). *Suatu operasi biner* $*$ *dan* $\boldsymbol{o}$ *pada himpunan tidak kosong* $\boldsymbol{G}$ *dikatakan:*

1. Assosiatif, jika $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in G$

2. Komutatif, jika $a * b = b * a, \forall\, a, b \in G$
3. Mempunyai unsur identitas, jika ada $e \in G$, sehingga $e * a = a * e = \forall\, a \in G$
4. Setiap anggota mempunyai invers di G, jika $\forall\, a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$
5. Operasi $*$ pada G dikatakan memenuhi hukum pencoretan kiri, jika $a * b = a * c$ mengakibatkan $b = c$ untuk setiap $a, b, c \in G$
6. Operasi $*$ pada G dikatakan memenuhi hukum pencoretan kanan, jika $b * a = c * a$, mengakibatkan $b = c$, untuk setiap $a, b, c \in G$
7. Anggota $e \in G$ dikatakan identitas kiri di G, jika $a * e = a, \forall\, a \in G$
8. Jika e identitas kanan di G, maka elemen $b \in G$, dikatakan invers kanan dari $a \in G$, jika $a * b = e$
9. Operasi $\boldsymbol{o}$ dikatakan distributif kiri terhadap $*$ jika $a\, \boldsymbol{o} (b * c) = (a\, \boldsymbol{o}\, b) * (a\, \boldsymbol{o}\, c), \forall\, a, b, c \in G$
10. Operasi $\boldsymbol{o}$ dikatakan distributif kanan terhadap $*$ jika $(a * b) \boldsymbol{o}\, c = (a\, \boldsymbol{o}\, c), \forall\, a, b, c \in G$.

Definisi 2.8. *Suatu himpunan tidak kosong* $\boldsymbol{G}$ *dengan satu atau lebih operasi biner pada* $\boldsymbol{G}$ *dikatakan struktur aljabar, atau sistem aljabar dan ditulis* $(\boldsymbol{G}, *)$.

Grup

Definisi 2.9. *Suatu sistem aljabar* $(\boldsymbol{G}, *)$ *dari himpunan tidak kosong* $\boldsymbol{G}$ *dengan operasi biner* $*$*, dikatakan grup jika memenuhi sifat berikut:*
1. Tertutup $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$
2. Sifat assosiatif $\forall a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Ada unsur identitas di G. Ada $e \in G$ sehingga $\forall a \in G$ berlaku $a * e = e * a = a$.
4. Ada unsur invers setiap anggota di G. $\forall a \in G$, ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Dari defenisi di atas dapat dikatakan bahwa suatu himpunan tidak kosong G dengan operasi biner $*$ "ditulis $(G, *)$" merupakan grup jika memenuhi sifat tertutup, assosiatif, mempunyai unsur identitas di G dan setiap anggota di G mempunyai invers di G. Selanjutnya jika $(G, *)$ merupakan grup dan memenuhi sifat komutatif yaitu $a * b = b * a\ \forall a, b \in G$, maka G disebut grup komutatif, dan jika tidak memenuhi sifat komutatif maka G disebut grup tidak komutatif.

Definisi 2.10. *Misalkan* $\boldsymbol{G}$ *himpunan tidak kosong dengan operasi biner* $*$ *didefenisikan pada* $\boldsymbol{G}$*, maka:*
1. $(G, *)$ disebut grupoid
2. Suatu grupoid $(G, *)$ yang memenuhi sifat assosiatif disebut semi grup.
3. Suatu semigrup $(G, *)$ yang mempunyai unsur identitas disebut monoid.

Defenisi di atas dapat digunakan untuk mendefenisikan grup, yaitu jika $(G, *)$ suatu monoid dan setiap anggota G mempunyai invers di G maka $(G, *)$ merupakan grup.

Definisi 2.12. *Misalkan* $(\boldsymbol{G}, *)$ *adalah grup*
1. Jika banyaknya anggota G terhingga (finite), maka $(G, *)$ disebut grup terhingga.
2. Jika banyaknya anggota G takterhingga (infinite), maka $(G, *)$ disebut grup takterhingga.

Sifat-sifat Grup

Dalam mempelajari sifat-sifat grup, kita nyatakan grup $(G, *)$ hanya dengan simbol G. Jadi jika $(G, *)$ dinyatakan sebagai grup cukup kita tulis G adalah grup. Juga untuk sebarang anggota a, b di G, perkalian anggota a dengan anggota b cukup ditulis ab, demikian juga penjumlahan a dengan b cukup ditulis a+b. Dengan menggunakan notasi di atas, akan dibuktikan beberapa sifat grup.

Teorema 2.13 (ketunggalan unsur identitas). *Unsur identitas suatu grup adalah tunggal.*

Bukti:

> Misalkan G adalah grup. Juga misalkan e dan e' adalah unsur identitas di G, akan ditunjukkan bahwa $e = e'$. Karena e unsur identitas di G dan $e' \in G$, maka $ee' = e'e = e'$. Juga e' unsur identitas di G dan $e \in G$, maka $e'e = ee' = e$. Jadi $e = e'e = ee' = e'$. Dengan demikian terbukti bahwa unsur identitas suatu grup adalah tunggal.

Teorema 2.14 (ketunggalan unsur invers). *Setiap anggota suatu grup mempunyai invers tunggal.*

Teorema 2.15. *Invers dari invers suatu anggota dalam grup adalah anggota itu sendiri.*

Definisi 2.16. *Suatu grupoid $\boldsymbol{G}$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{G}$ dikatakan memenuhi hukum pencoretan kiri jika $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{ay}$ mengakibatkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, dan dikatakan memenuhi pencoretan kanan jika $\boldsymbol{xa} = \boldsymbol{ya}$ mengakibatkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Selanjutnya jika $\boldsymbol{G}$ memenuhi hukum pencoretan kiri dan hukum pencoretan kanan, maka $\boldsymbol{G}$ dikatakan memenuhi hukum pencoretan.*

Teorema 2.17. *Setiap grup memenuhi hukum pencoretan.*

Teorema 2.18. *Jika $\boldsymbol{G}$ adalah grup dan $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$, maka berlaku $(\boldsymbol{ab})^{-1} = \boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a}^{-1}$.*

Teorema 2.19. *Jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sebarang anggota dari grup $\boldsymbol{G}$, maka persamaan $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{ya} = \boldsymbol{b}$ masing-masing mempunyai penyelesaian secara tunggal (penyelesaian tunggal) di $\boldsymbol{G}$.*

Teorema 2.20. *Setiap himpunan $\boldsymbol{G}$ dengan operasi biner perkalian merupakan grup jika dan hanya jika,*

1. Operasi perkalian bersifat assosiatif
2. $\forall a, b \in G$, persamaan $ax = b$ dan $ya = b$ mempunyai penyelesaian tunggal di G.

Akibat 2.21. *Suatu semigrup $\boldsymbol{G}$, membentuk grup jika $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$ persamaan $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{ya} = \boldsymbol{b}$ masing-masing mempunyai penyelesaian tunggal di $\boldsymbol{G}$.*

Teorema 2.22. *Suatu semigrup terhingga, membentuk grup jika memenuhi hukum pencoretan.*

Teorema 2.23 (Pendefenisian lain dari grup). *Suatu semi grup $\boldsymbol{G}$, disebut grup jika*

1. Ada $e \in G$ sehingga $ea = a, \forall a \in G$.
2. $\forall a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1}a = e$ (e dan a^{-1} berturut-turut disebut identitas kiri dan invers kiri dari a di G).

Akibat 2.24. *Suatu semi grup $\boldsymbol{G}$, disebut grup jika memenuhi*

1. Ada $e \in G$ sehingga $ae = a, \forall a \in G$
2. $\forall a \in G$, ada $a^{-1} \in G$ sehingga $aa^{-1} = e$.

Definisi 2.25. *Suatu grupoid $\boldsymbol{G}$ dinamakan quasi grup jika $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{G}$ persamaan $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$ dan $\boldsymbol{ya} = \boldsymbol{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal di $\boldsymbol{G}$.*

Akibat 2.26. Suatu Quasi grup yang assosiatif adalah grup.

Teorema 2.27. *Identitas kiri dri suatu grup juga merupakan identitas kanan.*

Teorema 2.28. *Invers kiri dari suatu grup juga merupakan invers kanan.*

Akibat 2.29

1. Identitas kanan suatu grup juga merupakan identitas kiri.
2. Invers kanan suatu anggota grup juga merupakan invers kiri dari anggota tersebut.

3. PEMBAHASAN

Hasil

Bentuk-bentuk himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup dan yang tidak dapat membentuk grup berdasarkan sifat-sifat grup.

1. Terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{C}, +)$.

a. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{z | z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$,$(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup apabila membentuk sifat-sifat berikut:

Penyelesaian

1) Sifat Tertutup

Ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, maka $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

Sehingga

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Karena $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$ Sehingga $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C}, +)$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

2) Asosiatif

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$

Sehingga

Ruas kiri $z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1) + ((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3))$
$= (x_1 + x_2 + x_3) + i(y_1 + y_2 + y_3)$
Ruas kanan $(z_1 + z_2) + z_3 = ((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) + (x_3 + iy_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3) + i(y_1 + y_2 + y_3)$

Karena $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ jadi $(\mathbb{C}, +)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi penjumlahan

3) Adanya unsur identitas

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$, maka

Terdapat $e = (0 + 0i)$ sehingga

$z + (0 + 0i) = (x + iy) + (0 + 0i) = (x + iy)$

$(0 + 0i) + z = (0 + 0i) + (x + iy) = = (x + iy)$

4) Setiap anggota mempunyai invers

$\forall z \in \mathbb{C}$ terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku

$z + z^{-1} = z^{-1} + z = 0 + 0i$

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$

Ada $z^{-1} = (-x - iy) \in \mathbb{C}$

$z^{-1} + z = z + z^{-1} = (x + iy) + (-x - iy) = (x - x) + (y - y)i$

$= 0 + 0i$

$z + z^{-1} = z^{-1} + z$

$= -(x + iy) + (x + iy) = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{z | z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat.

b. Misalkan $\mathbb{C} = \{\bar{z} | z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Apakah $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup? $(\mathbb{C}, +)$ apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Sifat Tertutup

Ambil sebarang $\overline{z_1}, \overline{z_2} \in \mathbb{C}$ maka $\overline{z_1} = x_1 - iy_1, \overline{z_2} = x_2 - iy_2$
Sehingga
$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$
Karena $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, Sehingga $\bar{z} + \bar{z} \in \mathbb{C}$
Jadi $(\mathbb{C}, +)$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

2) Sifat Asosiatif

$(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + \overline{z_3} = \overline{z_1}(\overline{z_2} + \overline{z_3})$
Misalkan $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$, $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$, $\overline{z_3} = x_3 - iy_3$
Sehingga
Ruas kiri $(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + \overline{z_3} = \big((x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)\big) + (x_3 - iy_3)$
$= (x_1 + x_2 + x_3) - i(y_1 - y_2 - y_3)$
Ruas kanan $\overline{z_1}(\overline{z_2} + \overline{z_3}) = (x_1 - iy_1) + \big((x_2 - iy_2) + (x_3 - iy_3)\big)$

$= (x_1 + x_2 + x_3) - i(y_1 - y_2 - y_3)$

Karena $(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + \overline{z_3} = \overline{z_1}(\overline{z_2} + \overline{z_3})$ tertpenuhi asosiatif terhadap operasi penjumlahan

3) Ada unsur identitas

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ maka terdapat $e = (0 + 0i)$

Sehingga $\bar{z} + (0 + 0i) = (x_1 - iy_1) + (0 + 0i) = = x_1 - iy_1$

$(0 + 0i) + \bar{z} = (0 + 0i) + (x_1 - iy_1) = x_1 - iy_1$

4) Setiap anggota mempunyai invers
$\forall \bar{z} \in \mathbb{C}$ terdapat $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku
$\bar{z} + \bar{z}^{-1} = \bar{z}^{-1} + \bar{z} = 0 + 0i$
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $\bar{z}^{-1} = -x - iy \in \mathbb{C}$
$\bar{z}^{-1} + \bar{z} = -(x + iy) + (x + iy)$
$= (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$
$\bar{z} + \bar{z}^{-1} = (x + iy) + (-x - iy)$
$= (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$
Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{\bar{z} | z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat.

c. Didefinisikan $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \mid z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$. Apakah $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup? $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Sifat Tertutup

Ambil sebarang $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2} \in \mathbb{C}$ maka $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1+iy_1}, \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_2+iy_2}$

Sehingga

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_1 + iy_1} + \frac{1}{x_2 + iy_2}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)}{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$$

Karena $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, Sehingga $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C}, +)$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

2) Sifat Asosiatif

$$\frac{1}{z_1} + \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) + \frac{1}{z_3}$$

Misalkan

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1+iy_1}, \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_2+iy_2}, \frac{1}{z_3} = \frac{1}{x_3+iy_3}$$

Ruas Kiri

$$\frac{1}{z_1} + \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)$$
$$= \frac{1}{x_1 + iy_1} + \left(\frac{1}{x_2 + iy_2} + \frac{1}{x_3 + iy_3}\right)$$
$$= \frac{1}{x_1 + iy_1} + \left(\frac{(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)}{(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)}\right)$$
$$= \frac{(x_2x_3 - y_2y_3 + x_2x_1 + x_1x_3 - y_2y_1 - y_1y_3) + i(x_2y_3 + x_3y_2 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_2 + x_1y_3)}{(x_1x_2x_3 - x_2y_3y_1 - x_3y_2y_1 - x_1y_2y_3) + i(x_2x_3y_1 + x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 - y_2y_3y_1)}$$

Ruas Kanan

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) + \frac{1}{z_3}$$
$$= \left(\frac{1}{x_1 + iy_1} + \frac{1}{x_2 + iy_2}\right) + \frac{1}{x_3 + iy_3}$$
$$= \left(\frac{(x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}\right) + \frac{1}{x_3 + iy_3}$$
$$= \frac{(x_3x_2 + x_3x_1 + x_1x_2 - y_1y_2 - y_3y_2 - y_3y_1) + i(x_3y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_1y_3 + x_1y_2 + x_2y_1)}{(x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)}$$

Karena $\frac{1}{z_1} + \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) + \frac{1}{z_3}$ jadi terpenuhi asosiatif terhadap operasi penjumlahan

3) Adanya unsur identitas

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$, maka terdapat $e = (0 + 0i)$ sehingga

$$z + (0 + 0i) = x + iy + (0 + 0i) = x + iy$$

$$(0 + 0i) + z = (0 + 0i) + x + iy = x + iy$$

4) Setiap anggota mempunyai invers

$\forall z \in \mathbb{C}$ terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku

$z + z^{-1} = z^{-1} + z = 0 + 0i$

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $z^{-1} = -x - iy \in \mathbb{C}$

$$z^{-1} + z = -(x + iy) + (x + iy) = (-x - iy) + (x + iy) = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$$

$$z + z^{-1} = (x + iy) + (-x - iy) = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0i$$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \mid z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$. merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat

d. Misalkan $\mathbb{C} = \left\{z | z = x + iy\sqrt{2}\,; x, y \in Q, i^2 = -1\right\}$ Apakah $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup? $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup komutatif apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Sifat Tertutup
Misal $x = \frac{p}{q} \in Q \quad y = \frac{a}{b} \in Q$
$x + iy\sqrt{2} = \frac{p}{q} + \frac{a}{b} i\sqrt{2} = \frac{pb + qai\sqrt{2}}{qb}$
Jadi $x + iy\sqrt{2} \in \mathbb{C}$ tertutup terhadap grup operasi penjumlahan

2) Sifat Asosiatif $\forall x, y, z \in Q$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$ Sehingga
$$\left(x + iy\sqrt{2}\right) + z = x + \left(iy\sqrt{2} + z\right), \forall x, y, z \in Q$$

3) Adanya unsur identitas
Ada $e = 0 + 0i = 0 \in \mathbb{C}$ sehingga $\forall x = \frac{p}{q} \in Q$ berlaku $(0 + x) = 0 + x = x$

4) Setiap anggota mempunyai invers
$\forall x = \frac{p}{q} \in Q$ ada $x^{-1} = (-x) = \frac{-p}{q} \in Q$ berlaku $x + (-x) = (-x) + x = e$
Jadi $\mathbb{C} = \left\{x + iy\sqrt{2} : x, y \in Q\right\}$ membentuk grup.
$\mathbb{C}$ grup komutatif karena $x + iy\sqrt{2} = iy\sqrt{2} + x$
$$= \frac{p}{q} + \frac{a}{b} i\sqrt{2} = \frac{a}{b} i\sqrt{2} + \frac{p}{q}$$
$$= \frac{pb + qai\sqrt{2}}{qb} = \frac{qai\sqrt{2} + pb}{qb}$$

e. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{|z| \mid z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Apakah $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup? $(\mathbb{C}, +)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Sifat tertutup
Ambil sebarang $z_{1,} z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$
Sehingga
$$|z_1| + |z_2| = |(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)| = |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)|$$
Karena $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$, Sehingga $|z_1| + |z_2| \in \mathbb{C}$
Jadi $(\mathbb{C}, +)$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

2) Asosiatif
$$(|z_1| + |z_2|) + |z_3| = |z_1| + (|z_2| + |z_3|)$$
Misalkan $|z_1| = |x_1 + iy_1|$, $|z_2| = |x_2 + iy_2|$, $|z_3| = |x_3 + iy_3|$
Sehingga
Ruas kiri
$$(|z_1| + |z_2|) + |z_3| = (|x_1 + iy_1| + |x_2 + iy_2|) + |x_3 + iy_3| = |x_1 + x_2 + x_3| + i|y_1 + y_2 + y_3|$$
Ruas kanan
$$|z_1| + (|z_2| + |z_3|) = |x_1 + iy_1| + (|x_2 + iy_2| + |x_3 + iy_3|) = |x_1 + x_2 + x_3| + i|y_1 + y_2 + y_3|$$
Karena $(|z_1| + |z_2|) + |z_3| = |z_1| + (|z_2| + |z_3|)$ jadi $(\mathbb{C}, +)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi penjumlahan

3) Adanya unsur identitas
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ maka terdapat $e = (0 + 0i)$
Sehingga
$$(0 + 0i) + |z| = (0 + 0i) + |x + iy| = |x + iy|$$

$|z| + (0 + 0i) = |x + iy| + (0 + 0i)$
$= |x + iy|$

4) Setiap anggota mempunyai invers
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$
Ada $z^{-1} = -x - iy \in \mathbb{C}$
$|z^{-1}| + |z| = -|x + iy| + |x + iy|$
$= |-x - iy| + |x + iy|$
$= |x - x| + i|y - y|$
$= 0 + 0i$
$|z| + |z^{-1}| = |x + iy| + |-x - iy|$
$= |x - x| + i|y - y|$
$= 0 + 0i$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{|z|\ |z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat.

2. Terhadap operasi perkalian $(\mathbb{C},\times)$.
   a. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Apakah $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup? $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:
      1) Tertutup
      Ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$
      Sehingga
      $z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$
      $= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
      Karena $x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{R}$, Sehingga $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$
      Jadi $(\mathbb{C},\times)$ tertutup terhadap operasi perkalian
      2) Sifat Asosiatif
      $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
      Misalkan, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$

      Sehingga

      Ruas kiri

      $z_1(z_2z_3) = (x_1 + iy_1)\big((x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)\big)$
      $= x_1x_2x_3 + x_1x_2iy_3 + x_1x_3iy_2 - x_1y_2y_3 + x_2x_3iy_1 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2 - iy_1y_2y_3$
      $= x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2 + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)$

      Ruas kanan

      $(z_1z_2)z_3 = ((x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2))(x_3 + iy_3)$
      $= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 + y_1y_2y_3$
      Karena $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ jadi $(\mathbb{C},\times)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi penjumlahan
      3) Adanya unsur identitas
      Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ maka terdapat
      $z \times (1 + 0i) = (x + iy) \times (1 + 0i)$
      $= (x + iy)$
      $(1 + 0i) \times z = (1 + 0i) \times (x + iy)$
      $= (x + iy)$
      4) Setiap anggota mempunyai invers

      $\forall z \in \mathbb{C}$ terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku

      $z \times z^{-1} = z^{-1} \times z = 1$

      Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $z^{-1} = \frac{1}{x+iy} \in \mathbb{C}$

      $z^{-1} \times z = \frac{1}{x+iy}(x + iy) = \frac{x+iy}{x+iy} = 1$

      $z \times z^{-1} = (x + iy)\frac{1}{x+iy} = \frac{x+iy}{x+iy} = 1$

      Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat

   b. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{\bar{z}|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Apakah $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup? $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Sifat Tertutup

Ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $\overline{z_1} = x - iy,\ \bar{z}_2 = x - iy$

Sehingga

$$\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1) \times (x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Karena $x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{R}$, Sehingga $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C},+)$ tertutup terhadap operasi perkalian

2) Sifat Asosiatif

$(\overline{z_1} \times \overline{z_2})\overline{z_3} = \overline{z_1}(\overline{z_2} \times \overline{z_3})$

Misalkan $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$, $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$, $\overline{z_3} = x_3 - iy_3$, Sehingga

Ruas kiri

$$(\overline{z_1} \times \overline{z_2})\overline{z_3} = \big((x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)\big)(x_3 - iy_3)$$
$$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 - y_1y_2\, y_3)$$

Ruas kanan

$$\overline{z_1}(\overline{z_2} \times \overline{z_3}) = (x_1 - iy_1)((x_2 - iy_2)(x_3 - iy_3))$$
$$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1\, y_3 - x_3y_1y_2)i(x_1x_2\, y_3 - x_1x_3iy_2 - x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3$$

Karena $(\overline{z_1} \times \overline{z_2})\overline{z_3} = \overline{z_1}(\overline{z_2} \times \overline{z_3})$ jadi terpenuhi asosiatif terhadap operasi perkalian

3) Adanya unsur identitas

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $\bar{z} = x + iy$ maka terdapat $e = 1 + 0i$

Sehingga $\bar{z} \times (1 + 0i) = (x - iy) \times (1 + 0i) = x - iy$

$$(1 + 0i) \times \bar{z} = (1 + 0i) \times (x - iy) = x - iy$$

4) Setiap anggota mempunyai invers

$\forall \bar{z} \in \mathbb{C}$ terdapat $\bar{z}^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku$\bar{z} \times \bar{z}^{-1} = \bar{z}^{-1} \times \bar{z} = 1$

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $\bar{z}^{-1} = \frac{1}{x-iy} \in \mathbb{C}$

$$\bar{z}^{-1} \times \bar{z} = \left(\frac{1}{x-iy}\right) x - iy = \frac{x-iy}{x-iy} = 1$$

$$\bar{z} \times \bar{z}^{-1} = x - iy\left(\frac{1}{x-iy}\right) = \frac{x-iy}{x-iy} = 1$$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{\bar{z} | z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat.

c. Misalkan $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{|z|\ |z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Apakah $(\mathbb{C} \times)$ membentuk grup? $(\mathbb{C} \times)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Tertutup

Ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka $|z_1| = x_1 + iy_1,\ |z_2| = x_2 + iy_2$

Sehingga

$$|z_1| \times |z_2| = |z_1 \times z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)|$$

Karena $x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{R}$, Sehingga $|z_1| \times |z_2| \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C},\times)$ tertutup terhadap operasi perkalian

2) Sifat Asosiatif

$|z_1| \times |z_2| = |z_1 \times z_2|$

$$(|z_1| \times |z_2|) \times |z_3| = |z_1| \times (|z_2| \times |z_3|)$$

Misalkan, $|z_1| = |x_1 + iy_1|$, $|z_2| = |x_2 + iy_2|$, $|z_3| = |x_3 + iy_3|$

Sehingga

Ruas kiri

$$(|z_1| \times |z_2|) \times |z_3| = (|x_1 + iy_1| \times |x_2 + iy_2|)|x_3 + iy_3|$$
$$= |(x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)|$$

Ruas kanan

$$|z_1|(|z_2| \times |z_3|) = |x_1 + iy_1||(x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3)|$$
$$= |(x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)|$$

Karena $(|z_1| \times |z_2|) \times |z_3| = |z_1| \times (|z_2| \times |z_3|)$ jadi $(\mathbb{C},\times)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi perkalian

3) Adanya unsur identitas

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ maka terdapat $e = 1 + 0i$

Sehingga $|z_1| \times (1 + 0i) = |x_1 + iy_1| \times (1 + 0i) = |x_1 + iy_1|$

$$(1 + 0i) \times |z_1| = (1 + 0i) \times |x_1 + iy_1| = |x_1 + iy_1|$$

4) Setiap anggota mempunyai invers

$\forall |z| \in \mathbb{C}$ terdapat $|z|^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku

$$|z| \times |z|^{-1} = |z|^{-1} \times |z| = 1$$

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $|z|^{-1} = \frac{1}{|x+iy|} \in \mathbb{C}$

$$|z|^{-1} \times |z| = \left(\frac{1}{|x+iy|}\right)|x + iy| = \frac{|x+iy|}{|x+iy|} = 1$$

$$|z| \times |z|^{-1} = |x + iy|\left(\frac{1}{|x+iy|}\right) = \frac{|x+iy|}{|x+iy|} = 1$$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \left\{|z| \,\middle|\, z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat.

d. Didefinisikan $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \mid z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$. Apakah $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup? $(\mathbb{C},\times)$ membentuk grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Tertutup

Misalkan ambil sebarang $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, maka $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1+iy_1}, \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_2+iy_2}$

Sehingga

$$\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_1 + iy_1} \times \frac{1}{x_2 + iy_2} = \frac{1}{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$$

Karena $x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{R}$

Sehingga $\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2} \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C},\times)$ tertutup terhadap operasi perkalian

2) Sifat Asosiatif

$$\frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_2} \times \frac{1}{z_3}\right) = \left(\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}\right)\frac{1}{z_3}$$

Misalkan, $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1+iy_1}, \frac{1}{z_2} = \frac{1}{x_2+iy_2}, \frac{1}{z_3} = \frac{1}{x_3+iy_3}$

Sehingga

Ruas kiri

$$\frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_2} \times \frac{1}{z_3}\right) = \frac{1}{x_1 + iy_1}\left(\frac{1}{x_2 + iy_2} \times \frac{1}{x_3 + iy_3}\right)$$
$$= \frac{1}{x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_2y_1 + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3)}$$

Ruas kanan

$$\left(\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}\right)\frac{1}{z_3} = \left(\frac{1}{x_1 + iy_1} \times \frac{1}{x_2 + iy_2}\right)\frac{1}{x_3 + iy_3}$$

$$= \frac{1}{x_1x_2x_3 - x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 + i(x_3x_1y_2 + x_2x_3y_1 + x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3)}$$

Karena $\frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_2} \times \frac{1}{z_3}\right) = \left(\frac{1}{z_1} \times \frac{1}{z_2}\right)\frac{1}{z_3}$ jadi $(\mathbb{C},\times)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi perkalian

3) Adanya unsur identitas
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dengan $z = x + iy$ maka terdapat $e = 1 + 0i$
Sehingga
$(1 + 0i) \times z = z \times (1 + 0i) = z$
$(x + iy) \times e = (x + iy) \times (1 + 0i)$
$= x + iy$
$e \times (x + iy) = (1 + 0i) \times (x + iy)$
$= x + iy$

4) Setiap anggota mempunyai invers
$\forall z \in \mathbb{C}$ terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ sehingga

Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $z^{-1} = \frac{1}{x+iy}$

$$z^{-1} \times z = \left(\frac{1}{x + iy}\right) \times (x + iy) = \frac{x + iy}{x + iy} = 1$$

$$z \times z^{-1} = (x + iy) \times \left(\frac{1}{x + iy}\right) = \frac{x + iy}{x + iy} = 1$$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \mid z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat

e. Misalkan $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy: |x + iy| = 1, i^2 = -1, x, y \in \mathbb{R}\}$ Buktikan, $\mathbb{C}$ dengan operasi perkalian membentuk grup. Apakah $\mathbb{C}$ komutatif?

1) Sifat Tertutup
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $= z_1 \times z_2$

$$= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Karena $x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$, $x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{R}$, Sehingga $z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$

Jadi $(\mathbb{C}, +)$ tetutup terhadap operasi perkalian

2) Sifat Asosiatif
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ berlaku $z_1(z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2)z_3$

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$

Sehingga

Ruas kiri

$$z_1(z_2 \times z_3) = x_1{+}iy_1(x_2 + iy_2 \times x_3 + iy_3)$$

$$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - y_1y_2y_3$$

Ruas kanan

$$(z_1 \times z_2)z_3 = \big((x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\big)(x_3 + iy_3)$$

$$= (x_1x_2x_3 - x_2y_1y_3 - x_3y_1y_2) + i(x_1x_2y_3 + x_1x_3y_3 - x_1y_2y_3 + x_2x_3y_1 + y_1y_2y_3)$$

Karena $z_1(z_2 \times z_3) = z_1 \times z_2)z_3$ jadi $(\mathbb{C},\times)$ terpenuhi asosiatif terhadap operasi perkalian

3) Adanya unsur identitas
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ maka terdapat $e = 1 + 0i$
Sehingga
$z \times (1 + 0i) = (x + iy) \times (1 + 0i) = x + iy$
$(1 + 0i) \times z = (1 + 0i) \times (x + iy)$
$= x + iy$

4) Setiap anggota mempunyai invers
Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dimana $z = x + iy$ ada $z^{-1} = \frac{1}{x+iy}$
Sehingga

$$z \times z^{-1} = x + iy\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \frac{x + iy}{x + iy} = 1$$

$$z^{-1} \times z = \left(\frac{1}{x + iy}\right) x + iy = \frac{x + iy}{x + iy} = 1$$

Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy: |x + iy| = 1, i^2 = -1, x, y \in \mathbb{R}\}$ merupakan grup karena dapat dibuktikan bahwa memenuhi keempat sifat

3. Himpunan bilangan kompleks yang tidak dapat membentuk grup
   a. $\mathbb{C} =$ himpunan bilangan kompleks didefinisikan $\{x * iy = x + iy\,; x \neq 0, y \neq 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$
      1) Sifat Tertutup karena $x + iy \in \mathbb{C}\quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
      2) Sifat Asosiatif karena $x + iy = iy + x\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
      3) Tidak memiliki identitas karena $\mathbb{C}$ memiliki identitas $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{C} \ni \forall x \in \mathbb{C}$ berlaku $x + e = x$ berarti e harus 0 dan 0 bukan elemen $\mathbb{C}$ sehingga $\mathbb{C}$ tidak memiliki identitas

B. Pembahasan

Bilangan kompleks adalah gabungan dari bilangan riil dan bilangan imajiner yang disimbolkan dengan $\mathbb{C}$ dan dapat ditulis dengan bentuk $\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Grup adalah suatu sistem aljabar $(G,*)$ dari himpunan tidak kosong G dengan operasi biner $*$. Suatu himpunan dikatakan grup apabila memenuhi beberapa sifat yaitu tertutup $\forall x, y \in G$ berlaku $x * y \in G$, sifat assosiatif $\forall x, y, z \in G$ berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$, ada unsur identitas di G. Ada $e \in G$ sehingga $\forall x \in G$ berlaku $x * e = e * x = x$, ada unsur invers setiap anggota di G. $\forall x \in G$, ada $x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh untuk mengetahui himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup dapat dilihat bahwa bentuk-bentuk himpunan bilangan kompleks pada operasi tertentu yaitu operasi penjumlahan dan perkalian, bilangan kompleks dapat membentuk grup. Hal ini dapat ditunjukkan dari beberapa contoh yang telah dibuktikan, misalnya, $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$, dengan operasi penjumlahan dan perkalian, $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \{\bar{z}|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dapat membentuk grup dengan operasi penjumlahan dan perkalian konjugat, $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks yang didefinisikan dengan $\mathbb{C} = \left\{|z|\ \middle|z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ dengan operasi perkalian modulo, $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \,|\, z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian, $\mathbb{C} = \left\{z|z = x + iy\sqrt{2}\,; x, y \in Q\right\}$ dengan operasi penjumlahan, $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; |x + iy| = 1; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1,\}$ dengan operasi perkalian. Sedangkan dalam operasi tertentu himpunan bilangan kompleks tidak dapat membentuk grup karena tidak berlaku sifat identitas misalnya pada contoh $\mathbb{C} =$ himpunan bilangan kompleks didefinisikan $\{x * iy = x + iy\,; x, y \neq 0\ \ \forall x, y \in \mathbb{C}\}$.

4. Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan bahwa bentuk-bentuk himpunan bilangan kompleks yang dapat membentuk grup adalah $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi $(\mathbb{C}, +)$ atau $(\mathbb{C},\times)$,

$\mathbb{C} = \{\bar{z}|z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian konjugat, $\mathbb{C} = \{|z|\ |z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi perkalian modulo, $\mathbb{C} = \left\{\frac{1}{z} \,|\, z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$ dengan operasi $(\mathbb{C}, +)$ atau $(\mathbb{C},\times)$, $\mathbb{C} = \left\{z|z = x + iy\sqrt{2}\,; x, y \in Q\right\}$ dengan operasi penjumlahan, $\mathbb{C} = \{z|z = x + iy; |x + iy| = 1; x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ dengan operasi perkalian.

5. DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Batam:Interaksara, 2000

Departemen Agama *Al-Quran dan terjemahannya*. Bandung:PT.Syaamil Cipta Media:2005

Departemen Agama, *Al-quran dan Terjemahannya*. Jakarta: CV. Darus Sunnah 2002

Durbin,johnR, *Introduction To Modern Algebra.http://roymahmud.wordpress.com /2009/06/29/aplikasi-group-dalam-bidang* *kristalografi/diakses pada tanggal1 desember 2013*

Hendrijanto, *Diktat kuliah struktur aljabar 1 (teori grup)*. Madiun: institut keguruan dan ilmu pendidikan, 2011

Ilham, Arifin. *Bilangan Kompleks*. Jakarta Selatan:Universita Indraprasta PGRI, 2001

Masyhuri, dkk, *Metodologi Penelitian Pendekatan Praktis dan Aplikatif*. Bandung:PT Refika Aditama. 2008

Noeyanti, *Logika Matematika*, Yogyakarta, *http://www.docdatabase.net/details-teori-himpunan-logika-matematika-1073843.html*

Prasetyono, Sunar, Dwi, dkk. *Panduan Efektif Belajar Cepat Matematika* Yogyakarta:Power Books (Ihdina). 2009

Rahman ,Abdul. *Fungsi dengan Peubah Kompleks*. Makassar:Universitas Negeri Makassar, 2002

Shihab, M. Quraish, *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta:Lentera Hati. 2007

SJ, Susilo, Frans. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta:Graha Ilmu. 2006

Tahmir, Suradi. *Teori Grup*. Makassar:Andira Publisher. 2004

Tiro, M. Arif ,dkk. *Teori Bilangan*. Makassar:Andira Publisher. 2008

Tiro, M. Arif, dkk. *Teori Peluang*. Makassar: Andira Publiser. 2008

Tiro, M. Arif. *Dasar-Dasar Statistik.* Makassar:Andira Publisher, 2008.