Bilangan Pembeda tanpa Titik Terisolasi Graf *Cycle Books*

Wahyuni Abidin
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, wahyuniabidin@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung dan berhingga. Misalkan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ merupakan subhimpunan dari $V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W didefinisikan sebagai $r(v|W) = d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k)$ dengan $d(v, w_i)$ menyatakan jarak v dan w_i. Himpunan W dikatakan himpunan pembeda dari G, jika setiap titik dari G mempunyai representasi yang berbeda. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut basis dari G. Lebih lanjut, banyaknya titik dalam basis G didefinisikan sebagai dimensi metrik dari G yang dinotasikan dengan $\dim(G)$. Himpunan pembeda W disebut himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, jika subgraf yang diinduksi $\langle W \rangle$ tidak mempunyai titik terisolasi. Suatu himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari G dengan kardinalitas minimum disebut himpunan-nr dari G. Kardinalitas dari himpunan-nr disebut bilangan pembeda tanpa titik terisolasi yang dinotasikan dengan $nr(G)$. Graf cycle books $B_{C_n,m}$ adalah graf yang terdiri salinan Cycle C_n dengan common path P_2. Pada makalah ini, ditentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf cycle books $B_{C_n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

Kata Kunci: bilangan pembeda tanpa titik terisolasi, dimensi metrik, graf cycle books, himpunan pembeda, himpunan pembeda tanpa titik terisolasi

1. PENDAHULUAN

Gagasan himpunan pembeda pada suatu graf diperkenalkan pertama kali oleh Slater[12], serta oleh Harary dan Melter[8], namun menggunakan istilah yang berbeda. Slater menggunakan istilah himpunan lokasi yang disebut sebagai himpunan pembeda oleh Harary dan Melter. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut sebagai himpunan pembeda minimum. Kardinalitas suatu himpunan pembeda minimum disebut sebagai bilangan lokasi oleh Slater, sedangkan Harary dan Melter menggunakan istilah dimensi metrik. Selanjutnya, dalam disertasi ini digunakan terminologi yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976.

Dimensi metrik dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah di beberapa bidang, di antaranya untuk optimasi kombinatorik[11], untuk navigasi robot pada jaringan[9], untuk optimasi penempatan sensor pendeteksi ancaman[6], dan untuk mengidentifikasi senyawa kimia[5].

Pada tahun 2015, Citra dan Arumugam memperkenalkan konsep bilangan pembeda tanpa titik terisolasi. Untuk suatu graf terhubung G, Citra dan Arumugam menentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi pada beberapa kelas graf, seperti graf lengkap, graf bipartit lengkap, graf lintasan, dan graf persahabatan. Mereka juga menunjukkan bahwa untuk graf terhubung G yang berorde n berlaku jika $nr(G) = 2\dim(G)$, maka setiap basis S di G adalah independen dan tidak ada dua titik yang mempunyai tetangga bersama di G. Selanjutnya, untuk sebarang dua bilangan bulat positif k dan n dengan $k \in \{2,3, \ldots, n-1\}$, terdapat graf G berorde n dengan $nr(G) = k$. Selain itu, mereka menentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf lengkap dikurangi satu sisi. Pada makalah yang sama, mereka juga menentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf lengkap K_{2n} dikurangi dengan *perfect matching*. Selanjutnya, misalkan T merupakan pohon yang bukan lintasan dan s menyatakan banyak titik v di T dengan $l_v > 1$, maka bilangan pembeda tanpa titik terisolasi T sama dengan $dim(T) + s$. Mereka juga memberikan suatu batas atas untuk sebarang graf terhubung G. Lebih jauh, mereka mengkarakterisasi graf terhubung G berorde $n \leq 3$ yang memiliki $nr(G) = n - 1$, yakni hanya dipenuhi oleh graf lengkap K_n atau graf bintang $K_{1,n-1}$[7]. Pada tahun 2018, Avadayappan dkk. menentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf split beberapa graf, di antaranya graf bintang, lengkap, graf siklus, dan graf lintasan[2].

2. KAJIAN TEORI

Pada bagian ini diberikan definisi, notasi-notasi, dan istilah dalam teori graf yang diperlukan pada penelitian ini. Adapun definisi, notasi-notasi, dan istilah yang digunakan dikutip dari Diestel[3], Abidin W dkk[1], Chitra dan Arumugam[7].

Graf dan Jenis-Jenis Graf

Graf adalah pasangan terurut $G = (V(G), E(G))$ yang terdiri dari himpunan $\mathrm{V(G)} \neq \emptyset$ dan $E(G) = \{\mathrm{u,v}\}|\mathrm{u,v} \in \mathrm{V(G)}$ dengan $\mathrm{u} \neq \mathrm{v}\}$. Himpunan V(G) disebut himpunan titik di G dan himpunan $E(G)$ disebut himpunan sisi di G. Suatu titik v dikatakan terkait dengan suatu sisi e, jika $v \in e$. Untuk menyederhanakan penulisan sisi $\{u, v\}$ ditulis uv. Dua titik u dan v pada G dikatakan bertetangga, jika $uv \in E(G)$. Banyaknya titik pada suatu graf G disebut orde, dinotasikan dengan $|V(G)|$. Suatu graf dikatakan berhingga jika ordenya berhingga.

Graf yang berorde 1 disebut graf trivial. Derajat titik $u \in G$, dinotasikan dengan $d(u)$, adalah banyaknya sisi yang terkait pada u. Suatu titik dikatakan titik terisolasi, jika derajatnya 0. Titik ujung adalah titik yang berderajat 1.

Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik sebarang u dan v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan u dan v. Misalkan G adalah suatu graf. Jarak antara dua titik u dan v di G, dinotasikan dengan $d_G(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut di G. Maksimum dari himpunan jarak sebarang dua titik di G disebut diameter G, dinotasikan dengan $diam(G)$.

Ada beberapa jenis-jenis graf, di antaranya graf lengkap, graf bipartite lengkap, graf lintasan, graf bintang, dan graf pohon. Graf lengkap, dinotasikan dengan K_n, adalah graf terhubung yang setiap dua titiknya saling bertetangga. Graf bipartite lengkap, dinotasikan dengan $K_{m,n}$, adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi 2 himpunan independen sehingga setiap dua titik di partisi berbeda saling bertetangga. Graf lintasan berorde n dinotasikan dengan P_n, adalah suatu graf yang titik-titiknya dapat dinamai dengan $v_1, v_2 \ldots, v_n$ sehingga $E(P_n) = v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$. Graf siklus berorde $n \geq 3$, dinotasikan dengan C_n, adalah graf terhubung teratur-2. Graf bintang berorde $n + 1$, dinotasikan dengan S_n, adalah graf terhubung yang mempunyai satu titik yang berderajat n dan n titik berderajat 1. Graf pohon berorde n, dinotasikan dengan T_n, adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus.

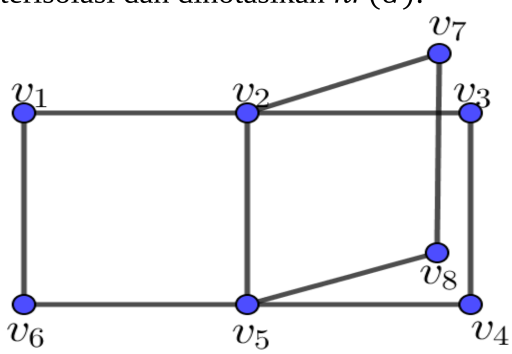
Dimensi Metrik Graf

Misalkan $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ adalah subhimpunan terurut titik-titik pada graf G. Representasi titik $u \in V(G)$ terhadap W, adalah $r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), \ldots, d(u, w_k)$ dengan $d(u, w_i)$ untuk $i \in [1, k]$ adalah jarak dari titik u ke titik w_i. Himpunan W disebut himpunan pembeda pada G jika untuk setiap titik u, v pada G dengan $u \neq v$ mengakibatkan $r(u|W) \neq r(v|W)$. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dari G disebut sebagai basis G. Bilangan bulat terkecil k sehingga G mempunyai suatu himpunan pembeda dengan k anggota disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi

Chitra dan Arumugam memperkenalkan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi pada tahun 2015. Bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf G disimbolkan dengan $nr(G)$. Adapun definisi bilangan pembeda tanpa titik terisolasi sebagai berikut.

Definisi 1.
Himpunan pembeda W dari graf G dikatakan sebagai himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, jika $\langle W \rangle$ subgraf G yang diinduksi oleh W tidak memiliki titik terisolasi. Kardinalitas dari himpunan pembeda tanpa titik terisolasi yang minimum dari G disebut bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dan dinotasikan $nr(G)$.



Gambar 2.1. Graf *H*

Sebagai ilustrasi, perhatikan graf H, seperti pada Gambar 1. Misalkan $W_1 = \{v_1, v_3, v_7\}$. Representasi $v \in V(H)$ terhadap W_1, yaitu $r(v_2|W_1) = (1,1,1)$, $r(v_4|W_1) = (3,1,3)$, $r(v_5|W_1) = (2,2,2)$, $r(v_6|W_1) = (1,3,3)$ dan $r(v_8|W_1) = (3,3,1)$. Karena itu, W_1 merupakan himpunan pembeda dari graf H karena semua titik di H mempunyai representasi yang berbeda. Akan tetapi, W_1 bukan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi karena W_1 memuat titik terisolasi. Muncul suatu pertanyaan, apakah ada himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dengan kardinalitas 3. Misalkan dipilih $W_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ atau $W_3 = \{v_1, v_2, v_6\}$. Dalam pemilihan ini ternyata W_2 atau W_3 bukan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi karena $r(v_5|W_2) = r(v_7|W_2)$ atau $r(v_5|W_3)$= $r(v_7|W_3)$. Oleh karena itu, tidak ada himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dengan kardinalitas 2. Jadi diperlukan menambah minimal 1 anggota pada himpunan pembeda W_1, yaitu $W_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$. Himpunan W_4 merupakan himpunan- nr di H. Jadi, $nr(H) = 4$.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Untuk mencapai tujuan penelitian, penelitian pada setiap tahun dilakukan dalam dua tahap sebagai berikut.

1. Tahap Pendahuluan
   Penilitian ini diawali dengan menelaah literatur yang terkait dengan dimensi metrik dan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi. Hal ini dilakukan untuk memastikan hasil peneliti lain pada topik ini sehingga dapat diyakini kebaruan masalah yang akan dikaji.
2. Tahap Penelitian
   Pada tahapan ini, kegiatan penelitian difokuskan pada penentukan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf cycle books. Pembuktian dibagi ke dalam dua kasus.
   a. Penentuan batas bawah
      Untuk menentukan batas bawah bilangan pembeda tanpa titik tersisolasi dilakukan dengan menggunakan metode kontradiksi karakter graf cycle books, dan dimensi graf.
   b. Penentuan batas atas
      Pertama yang dilakukan pendefinisian himpunan titik dan himpunan sisi pada graf cycle books. Kemudian, dikonstruksi calon himpunan pembeda tanpa titik terisolasi. Diupayakan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan batas bawah yang sudah diperoleh. Kemudian dilakukan pengecekan representasi semua titik pada graf sehingga setiap titik memiliki representasi yang unik.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, dikaji bilangan pembeda tanpa titik terisolasi graf cycle books $B_{C_3,m}$, $B_{C_4,m}$, $B_{C_5,m}$, dan $B_{C_n,m}$ dengan $n \geq 6, m \geq 2$. Graf cycle books $B_{C_n,m}$ adalah graf yang terdiri dari m salinan (copies) Cycle C_n dengan common path P_2[10].

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Cycle Books $B_{C_3,m}$

Pada bagian ini akan ditunjukkan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf cycle books $B_{C_3,m}$. Bilangan pembada tanpa titik terisolasi dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 1.
Untuk $m \geq 2$, misalkan G adalah graf cycle books $B_{C_3,m}$, maka

$$nr(G) = m \tag{3.1}$$

Bukti:
Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{c1}, v_{c2}\}$ dan $E(G) = \{v_{c1}v_{c2}, v_{c2}v_i, v_iv_{c1}\}$ dengan $1 \leq i \leq m$. Definisikan $W = \{v_{c1}, v_i | 1 \leq i \leq m-1\}$. Karena $v_{c1}v_i \in E(G)$, jelas bahwa W tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $nr(G) \leq m$. Representasi setiap titik di $V(G) - W$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{m})$$
$$r(v_i|W) = (\underbrace{1,2,\dots,2}_{m-1}), \quad i = m$$

Kemudian, akan ditunjukkan $nr(G) \geq m$. Dengan menggunakan kontradiksi, asumsikan $nr(G) < m$. Misalkan W' adalah himpunan- nr dari G dengan $|W'| < m$. Jika $v_{c1}, v_{c2} \notin W'$, maka W' memuat titik terisolasi. Jika $v_{c1} \in W'$ atau $v_{c2} \in W'$, maka terdapat paling sedikit dua titik yang memiliki representasi sama, yaitu $r(v_i|W') = r(v_j|W')$ dengan $i \neq j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$.

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Cycle Books

Pada bagian ini akan ditunjukkan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf cycle books $B_{C_4,m}$ dan $B_{C_5,m}$. Didefinisikan $V(B_{C_4,m}) = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{c1}, v_{c2}\}$ dan $E(B_{C_4,m}) =$

$\{v_{c1}v_{i,1}, v_{i,1}v_{i,2}, v_{i,2}v_{c2}, v_{c2}v_{c1}\}$ dengan $1 \le i \le m$. Sedangkan $V(B_{C_5,m}) = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, v_{c1}, v_{c2}\}$ dan $E(B_{C_4,m}) = \{v_{c1}v_{i,1}, v_{i,1}v_{i,2}, v_{i,2}v_{i,3}, v_{i,3}v_{c2}, v_{c2}v_{c1}\}$ dengan $1 \le i \le m$. Bilangan pembada tanpa titik terisolasi graf $B_{C_4,m}$ dan $B_{C_5,m}$ dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 2.
Untuk $m \ge 2$, misalkan G adalah graf cycle books $B_{C_4,m}$ atau $B_{C_5,m}$ maka

$$nr(G) = \begin{cases} m, & \text{jika } m = 2 \\ m+1, & \text{jika } m \ge 3 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Bukti:
Pandang dua kasus berikut.
Kasus 1. $m = 2$
Definisikan $W = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}$. Karena $v_{1,1}v_{1,2} \in E(G)$, jelas bahwa W tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $nr(G) \le m$. Untuk graf $B_{C_4,2}$, representasi setiap titik di $V(G) - W$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (1,2), \quad r(v_{c2}|W) = (2,1),$$
$$r(v_{2,1}|W) = (2,3), \quad r(v_{2,2}|W) = (3,2).$$

Untuk graf $B_{C_5,2}$, representasi setiap titik di $V(G) - W$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = (1,2), \quad r(v_{c2}|W) = (2,2),$$
$$r(v_{1,3}|W) = (2,1), \quad r(v_{2,1}|W) = (2,3),$$
$$r(v_{2,2}|W) = (3,4), \quad r(v_{2,3}|W) = (3,3).$$

Terakhir, akan ditunjukkan $nr(G) \ge m$. Misalkan W' adalah himpunan- nr dari G dengan $|W'| < m$. Dengan menggunakan kontradiksi, andaikan $nr(G) < m$. Akibatnya, W'memuat titik terisolasi.
Kasus 2. $m \ge 3$
Definisikan $W = \{v_{c1}, v_{i,1} | 1 \le i \le m\}$. Karena $v_{c1}v_{i,1} \in E(G)$ untuk setiap $1 \le i \le m$, jelas bahwa W tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $nr(G) \le m + 1$. Representasi setiap titik di $V(G) - W$ terhadap W adalah

$$r(v_{c2}|W) = (1, \underbrace{2,2 \dots, 2}_{m-1})$$
$$r(v_{i,2}|W) = (2, \underbrace{3, \dots, 3}_{i-1}, 1, \underbrace{3, \dots, 3}_{m-i}), 1 \le i \le m$$
$$r(v_{i,3}|W) = (2, \underbrace{3, \dots, 3}_{i-1}, 2, \underbrace{3, \dots, 3}_{m-i}), 1 \le i \le m$$

Terakhir, akan ditunjukkan $nr(G) \ge m + 1$. Misalkan W' adalah himpunan- nr dari G dengan $|W'| < m + 1$. Dengan menggunakan kontradiksi, asumsikan $nr(G) < m + 1$. Jika $v_{c1}, v_{c2} \notin W'$, maka terdapat paling sedikit dua titik yang memiliki representasi sama, yaitu $r(v_i|W') = r(v_j|W')$ dengan $i \ne j$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le m$. Jika $v_{c1} \in W'$ atau $v_{c2} \in W'$, misal $v_{c1} \in W'$ maka terdapat paling sedikit dua titik yang memiliki representasi sama, yaitu $r(v_i|W') = r(v_{c2}|W')$ dengan $i \ne j, 1 \le i \le$.

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Cycle Books $B_{C_n,m}$ dengan $n \ge 6$, dan $m \ge 2$.

Pada bagian ini akan ditunjukkan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf cycle books $B_{C_n,m}$ dengan $n \ge 6$ dan $m \ge 2$. Bilangan pembada tanpa titik terisolasi dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 3.
Untuk $n \ge 6$ dan $m \ge 2$, misalkan G adalah graf cycle books $B_{C_n,m}$, maka

$$nr(G) = 2(m-1) \qquad (3.3)$$

Bukti:
Kasus 1. Untuk n Genap
Didefinisikan $W = \{v_{i,j}, v_{i,j+1} | 1 \le i \le m - 1, j = \frac{n-2}{2}\}$. Karena $v_{i,j}v_{i,j+1} \in E(G)$ untuk $1 \le i \le m$ dan $j = \frac{n-2}{2}$, jelas bahwa W tidak memuat titik terisolasi. Selanjutnya, akan ditunjukkan $nr(G) \le 2(m-1)$. Representasi setiap titik di $V(G) - W$ terhadap W adalah

$$r(v_{c1}|W) = \left(\underbrace{\frac{n-2}{2}, \dots, \frac{n-2}{2}}_{m-1}, \underbrace{\frac{n-2}{2}+1, \dots, \frac{n-2}{2}+1}_{m-1} \right)$$

$$r(v_{c2}|W) = \left(\underbrace{\frac{n-2}{2}+1, \dots, \frac{n-2}{2}+1}_{m-1}, \underbrace{\frac{n-2}{2}, \dots, \frac{n-2}{2}}_{m-1} \right)$$

Representasi setiap titik $v_{i,j} \in V(G) - W$ dengan $1 \le i \le m - 1$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-2}{2}+j,\dots,\frac{n-1}{2}+j}_{i-1},$$
$$\frac{n-2}{2}-j,$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+j,\dots,\frac{n-2}{2}+j}_{m-i-1}$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+(j+1),\dots,\frac{n-2}{2}+(j+1)}_{i-1}$$
$$\frac{n-2}{2}-(j-1),$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+(j+1),\dots,\frac{n-2}{2}+(j+1)}_{m-i-1}\Bigg),$$
$$1 \le j \le \frac{n-2}{2}-1$$

$$r(v_{i,j}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-(j-1),\dots,\frac{n-2}{2}+n-(j-1)}_{i-1},$$
$$(j-1)-\frac{n-2}{2},$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-(j-1),\dots,\frac{n-2}{2}+n-(j-1)}_{m-2}$$
,
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-j,\dots,\frac{n-2}{2}+n-j}_{i-1},$$
$$j-\frac{n-2}{2},$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-j,\dots,\frac{n-2}{2}+n-j}_{m-i-1}\Bigg),$$
dengan $\frac{n-2}{2}+2 \le j \le n-2$.

Representasi setiap titik $v_{i,j} \in V(G)$ dengan $i = m$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-2}{2}+j,\dots,\frac{n-2}{2}+j}_{m-1},$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+(j+1),\dots,\frac{n-2}{2}+(j+1)}_{m-1}\Bigg),$$
dengan $1 \le j \le \frac{n-2}{2}$.

$$r(v_{i,j}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-(j-1)),\dots,\frac{n-2}{2}+n-(j-1)}_{m-1},$$
$$\underbrace{\frac{n-2}{2}+n-j,\dots,\frac{n-2}{2}+n-j}_{m-1}\Bigg),$$ dengan
$$\frac{n-2}{2}+2 \le j \le n-2.$$

Terakhir, akan ditunjukkan $nr(G) \ge 2(m-1)$. Misalkan W' adalah himpunan- nr dari G dengan $|W'| < 2(m-1)$. Dengan menggunakan kontradiksi, jika $nr(G) < m+1$, maka terdapat paling sedikit dua titik yang memiliki representasi sama, yaitu $r(v_{p,q}|W') = r(v_{r,s}|W')$ dengan $p \ne r$, dan $p, r \in \{1,2,\dots,m\}$ serta $q, s \in \{1,2,\dots,n-2\}$.

Kasus 2. Untuk n Ganjil

Didefinisikan $W = \{v_{i,j}, v_{i,j+1} | 1 \le i \le m-1, \quad j = \frac{n-3}{2}\}$. Karena $v_{i,j}v_{i,j+1} \in E(G)$ untuk setiap $1 \le i \le m$ dan $j = \frac{n-3}{2}$, jelas bahwa W tidak memuat titik terisolasi.

$$r(v_{c1}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-3}{2},\dots,\frac{n-3}{2}}_{m-1},$$
$$\underbrace{\frac{n-3}{2}+1,\dots,\frac{n-3}{2}+1}_{m-1}\Bigg)$$
$$r(v_{c2}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-3}{2}+1,\dots,\frac{n-3}{2}}_{2(m-1)}+1\Bigg)$$

Representasi setiap titik $v_{i,j} \in V(G) - W$ dengan $1 \le i \le m-1$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \Bigg(\underbrace{\frac{n-1}{2}+(j-1),\dots,\frac{n-1}{2}+(j-1)}_{i-1},$$
$$\frac{n-1}{2}-(j+1),$$
$$\underbrace{\frac{n-1}{2}+(j-1),\dots,\frac{n-1}{2}+(j-1)}_{m-i-1}$$
$$\underbrace{\frac{n-1}{2}+j,\dots,\frac{n-1}{2}+j}_{i-1}$$

$$\frac{n-1}{2}-j,$$

$$\left.\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+j}_{m-i-1}\right),\ 1 \le j \le \tfrac{n-1}{2}-2$$

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\frac{n-1}{2}+n-j}_{i-1},\right.$$

$$j-\frac{n-1}{2},$$

$$\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+n-j}_{m-2},$$

$$\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+n-j}_{i-1},$$

$$(j-1)-\frac{n-1}{2},$$

$$\left.\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+n-j}_{m-i-1}\right),$$

dengan $\tfrac{n-1}{2}+1 \le j \le n-2$.

Representasi setiap titik $v_{i,j} \in V(G)$ dengan $i = m$ terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+(j-1),\ldots,\tfrac{n-1}{2}+(j-1)}_{m-1},\right.$$

$$\underbrace{\frac{n-1}{2}+j,\ldots,\frac{n-1}{2}+j}_{m-1},$$

$$\left.\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+j}_{m-1}\right),\ \text{dengan}$$

$1 \le j \le \tfrac{n-1}{2}$.

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{n-1}{2}+n-(j+1),\ldots,\frac{n-1}{2}+n-(j+1)}_{m-1},\right.$$

$$\left.\underbrace{\tfrac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\tfrac{n-1}{2}+n-j}_{m-1}\right),\ \text{dengan}$$

$j = \tfrac{n-1}{2}$+1.

$$r(v_{i,j}|W) = \left(\underbrace{\frac{n-1}{2}+n-j,\ldots,\frac{n-1}{2}+n-j}_{2(m-1)}\right)$$

dengan $\tfrac{n-1}{2}+2 \le j \le n-2$.

Terakhir, akan ditunjukkan $nr(G) \ge 2(m-1)$. Misalkan W' adalah himpunan- nr dari G dengan $|W'| < 2(m-1)$. Dengan menggunakan kontradiksi, jika $nr(G) < m+1$, maka terdapat paling sedikit dua titik yang memiliki representasi sama, yaitu:

$$r(v_{p,q}|W') = r(v_{r,s}|W')$$

dengan $p \ne r$, dan $p, r \in \{1,2,\ldots,m\}$ serta $q, s \in \{1,2,\ldots,n-2\}$.

5. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf cycle books B_n, m dengan $\boldsymbol{n} \ge 3, \boldsymbol{m} \ge \mathbf{2}$, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

$$nr(B_n, m) = \begin{cases} m, & n \ge 3, m \ge 2, n \in \{4,5\}, m = 2 \\ m+1, & n \in \{4,5\}, n \in \{4,5\}, m \ge 3 \\ 2(m-1), & n \ge 6, m \ge 2 \end{cases}$$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abidin, W. (2021): Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Hasil Operasi Korona dan Hasil Operasi Sisir Titik, Disertasi Program Doktor, InstitutTeknologi Bandung.

[2] Avadayappan, S., Bhuvaneshwari, M. dan Chitra, P. J. B. (2018): Non-isolated resolving number for some splitting graphs, International Journal of Mathematical Combinatorics, 9–18.

[3] Diestel, R. (2005): Graph Theory, Springer Book, New York.

[4] Harary, F. dan Melter, R. A. (1976). On themetric dimension of graph, Ars Combinatoria, 2, 191–195.

[5] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A. dan Oellermann, O. R. (2000): Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, Discrete Applied Mathematics, 105, 99–113.

[6] Chartrand, G. dan Zhang, P. (2003): The theory and application of resolvability in graphs, Congressus Numerantium, 160, 47–68.
[7] Chitra, P. J. B. dan Arumugam, S. (2015): Resolving Sets without Isolated Vertices, Procedia Computer Science, 74, 38–42.
[8] Harary, F. dan Melter, R. A. (1976): On the metric dimension of graph, Ars Combinatoria, 2, 191–195.
[9] Khuller, S., Raghavachari, B. dan Rosenfield, A. (1996): Landmarks in graphs, Discrete Applied Mathematics, 70, 217–229.
[10] Santoso, J and Darmaji. (2018): The partition dimension of cycle books graph, doi :10.1088/1742-6596/974/1/012070.
[11] Sebö, A. dan Tannier, E. (2004): On metric generators of graphs, Mathematics of Operations Research, 29, 383–393.
[12] Slater, P.J. (1975). Leaves of trees, *Proceeding of the 6Th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium*, 14, 549-559.