JUMLAH BESARAN KLAIM DENGAN METODE REKURSIF (*N* ~ *Poisson (λ)*)

Faihatuz Zuhairah[i]

[i] *Prodi Pendidikan Matematika, STKIP YPUP Makassar, faihatuz_zuhairoh@yahoo.com*

ABSTRAK, Jumlah besaran klaim dapat dihitung dengan menggunakan model individual dan model kolektif. Model individual berbentuk $X^{ind} = \sum_{i=1}^{n} U_i$ dengan besar klaim U_i bernilai positif dan diasumsikan dengan barisan $U_1, U_2, \ldots$ yang merupakan variabel random independen dan berdistribusi sama. Fungsi pembangkit $\hat{g}(z)$ dari jumlah besaran klaim (*the aggregate claim amount*) X^{ind} dalam model ini dengan asumsi $N \sim POISSON\left(\lambda \in (0,1)\right)$ adalah $\hat{g}(z) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j+\theta_j\sum_{k=1}^{m_i}\frac{e^{-\lambda i}}{k!}(\lambda z)^k\right)^{n_{ij}}$.

Kata Kunci*: model individual, jumlahan klaim, Poisson, rekursif*

1. PENDAHULUAN

Proses Jumlah Klaim

Pada bagian ini, diasumsikan bahwa T_i berdistribusi **Eksponensial**.

Didefinisikan bahwa :

$N(t) = \sup\{n : c_k \le t\}$, yaitu banyaknya klaim yang masuk sampai waktu ke *t*.

$$W_k = \sum_{i=1}^{k} T_i = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \, , \qquad (1)$$

yaitu waktu penantian sampai dengan klaim ke *n* terjadi.

Misal T_i independen dan berdistribusi identik yang berbentuk eksponensial dengan parameter λ, yaitu

$$T_i \sim EXP(\lambda) \qquad (2)$$

Misalkan $T_i = x$ maka PDF (*Probability Density Function*) dari T_i adalah $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (Ross, S. M., 2007: 36).

Karena $T_i = x$ maka diperoleh MGF dari distribusi eksponensial adalah $M_{T_i}(t) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{\lambda}t}$

Jadi $N(t)$ berdistribusi Poisson, ditulis sebagai berikut $N(t) \sim POI(\lambda t)$

Jumlah Besaran Klaim

Untuk menentukan kumpulan jumlahan klaim dalam waktu *t* digunakan persamaan $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$ yang mempunyai fungsi distribusi

$$F_{X(t)}(x) = \mathrm{P}\left(X(t) \le x\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} U_i \le x\right) \qquad (3)$$

(Rolski, T., 1999: 8).

Jumlah besaran klaim (*The Aggregate Claim Amout*) sampai waktu *t* dinyatakan dengan persamaan $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$, yang mempunyai fungsi distribusi

$$F_{X(t)}(x) = \mathrm{P}\left(X(t) \le x\right) = \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} U_i \le x\right) \qquad (4)$$

(Rolski, Thomasz., 1999: 8)

Jika U_i ~ Gamma (α, β) dengan PDF $f(u) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} u^{\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}}$ (Roussas, G. G., 1997: 67) maka MGF-nya adalah

$$M_{U_i}(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \qquad (5)$$

Karena diasumsikan U_i saling independen, maka

$$\begin{aligned} M_{X(t)|N(t)=k}(t) &= \prod_{i=1}^{k} E\left[e^{tU_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{k} M_{U_i}(t) \\ &= \left(\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^{k\alpha}} \end{aligned}$$

Dari MGF di atas, terlihat bahwa

$$X(t) \sim GAM\,(k\alpha, \beta) \qquad (5)$$

2. TINJAUAN PUSTAKA

Model Individual dan Kolektif

Diberikan portfolio yang terdiri dari n polis dengan resiko individual $U_1, U_2, ..., U_n$ pada periode waktu tertentu. Diasumsikan bahwa $U_1, U_2, ..., U_n$ adalah variabel random positif yang independen, tetapi tidak perlu mempunyai distribusi yang sama. Misalkan distribusi F_{U_i} dari U_i adalah mixture $F_{U_i} = (1-\theta_i)\delta_0 + \theta_i F_{V_i}$, dimana $0 < \theta_i \le 1$ dan dimana F_{V_i} adalah distribusi dari variabel random positif $V_i, i = 1, ..., n$.

Dalam aplikasi aktuaria, peluang θ_i bernilai kecil dan dapat diinterpretasikan sebagai peluang dari polis ke-i yang menghasilkan V_i. Jumlah besaran klaim dalam model ini, yang disebut **Model Individual** (*Individual Model*) adalah:

$$X^{ind} = \sum_{i=1}^{n} U_i \qquad (6)$$

Dengan distribusi $F_{U_1} * F_{U_2} * ... * F_{U_n}$. Portfolio ini disebut *homogeneous* jika $F_{V_1} = F_{V_2} = ... = F_{V_n}$.

Andaikan diberikan portofolio yang terdiri dari sejumlah polis yang tidak diketahui dimana tidak dilakukan observasi secara terpisah. Jumlah total klaim yang terjadi sebanyak N yang diberikan pada periode acak. Selanjutnya, besar klaim U_i bernilai positif dan diasumsikan dengan barisan $U_1, U_2, ...$ yang merupakan variabel random independen dan berdistribusi sama. Diasumsikan juga bahwa barisan $U_1, U_2, ...$ dari besar klaim individual adalah independen dengan jumlah klaim N. Umumnya, N berdistribusi poisson, binomial atau binomial negatif, tetapi mungkin juga berdistribusi lain. Model ini disebut juga **Model Kolektif** (*Collective Model*) dan jumlah besaran klaim adalah variabel random $X^{col} = \sum_{i=1}^{n} U_i$.

Compound Distribution

Misalkan kita ingin mengevaluasi total pembayaran untuk suatu periode waktu (satu tahun, satu bulan, satu minggu, atau lainnya) dari portfolio individual. Misalkan N adalah bilangan asli – nilai dari variabel random dan $U_1, U_2, ...$ adalah barisan variabel random positif. Maka variabel random

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} U_i, \; jika\; N \ge 1 \\ 0 \qquad , \; jika\; N = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

disebut *compound* dan menggambarkan jumlah besaran klaim dalam Model Individual dan diasumsikan variabel random $N, U_1, U_2, ...$ independen. Kita katakan bahwa X memiliki *a compound distribution* yang dideterminasi oleh fungsi peluang $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ dari N dan oleh distribusi F_U dari U_i, jika distribusi dari X diberikan oleh:

$$F_X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_U^{*k} \qquad (8)$$

Dimana F_U^{*k} adalah *k-fold* konvolusi dari F_U.

Dalam kasus ini akan dibahas untuk U_i berdistribusi Gamma dan N berdistribusi Poisson.

Misal $U_i \sim Gamma(\alpha,\beta)$ dengan $f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}$ dengan mean $\alpha\beta$ (Roussas, G. G., 1997: 67).

Fungsi Pembangkit Momen (MGF) dari U adalah

$$M_U(z)=\frac{1}{(1-\beta z)^{\alpha}} \qquad (9)$$

Dan misalkan $N \sim POI\ (\lambda)$ dengan $p_k=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ dan Fungsi Pembangkit Peluang (PGF) dari N adalah $P_N(z)=e^{\lambda(z-1)}$ (Klugman, S & Panjer, H., 2006: Apendix B)

Akan dicari distribusi fungsi X

$$X=U_1+U_2+...+U_N \qquad (10)$$

Fungsi Pembangkit Moment (MGF) dari X adalah:

$$M_X(z)=P_N\left[M_U(z)\right]$$
$$=e^{\lambda\left(\frac{1}{(1-\beta z)^{\alpha}}-1\right)}$$

Terjadi dua titik *mixture*, yaitu:

1. $M_x(0)=e^{\lambda\left(\frac{1}{(1-\beta z)^{\alpha}}-1\right)}=e^{\lambda\left(\frac{1}{(1-\beta(0))^{\alpha}}-1\right)}=e^0=1$
2. Merupakan distribusi Gamma, $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$\Pr(X=0)=e^{-\lambda}, untuk\ x>0$, sehingga pdf dari X adalah:

$$f_X(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}-\lambda}$$

Penghitungan nilai CDF, $E(X), Var(x)$ dan Premi:

$$F_X(x)=\sum_0^{\infty}p_kF_U^{*k}$$
$$=\sum_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}F_U^{*n}(x)$$
$$=\sum_0^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}F_U^{*n}(x)$$

Dimana $F_U^{*n}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^x x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dv$

$$E(X)=E(N)E(U)$$
$$=(\lambda)(\alpha\beta)$$
$$=\lambda\alpha\beta$$

$$Var(X)=Var(N)\left[E(U)\right]^2+E(N)Var(U)$$
$$=\lambda(\alpha\beta)^2+\lambda(\alpha\beta^2)$$
$$=\lambda\alpha^2\beta^2+\lambda\alpha\beta^2$$
$$=\lambda\alpha\beta^2(\alpha+1)$$

Penghitungan premi dengan menggunakan prinsip nilai ekspektasi (*expected value principles*) adalah:

$$\prod(X)=(1+a)E(X) \qquad ,a\ge 0$$
$$=(1+a)\lambda\alpha\beta \qquad (11)$$

3. METODOLOGI

Untuk memperoleh fungsi probabilitas yang akan digunakan menentukan jumlah besaran klaim dengan asumsi distribusi Poisson dilakukan dengan:

1. Membuat distribusi klaim portfolio ke-k
2. Menghitung banyaknya klaim dengan asumsi distribusi Poisson yang akan menggunakan penghitungan rekurensi panjer
3. Menghitung model individual dengan **De Pril's Algorithm**
4. Menghitung probabilitas besaran klaim dengan relasi rekursif

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Larger Claims in the Portfolio

Distribusi dari klaim portfolio ke-*k* yang terbesar diberikan oleh:

$$\Pr\left(U_{(N-k+1)}\ge x\right)=$$
$$\frac{1}{(k-1)!}\int_x^{\infty}\hat{g}_N^{(k)}\left(F_U(y)\right)\left(1-F_U(y)\right)^{k-1}dF_U(y)$$

Jika banyaknya klaim N berdistribusi Poisson dengan mean λ dan ukuran klaim $F_U \sim Gamma(\alpha, \beta)$ dengan mean $\alpha\beta$.

Dari: $\hat{g}_N^k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n z^{n-k}$

(Rolski, T., 1999: 108)

Maka: $\hat{g}_N(z) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k(1-z)}}{k(1-z)!}$ dan

$\hat{g}_N^{(k)}(z) = k!\frac{e^{-\lambda}\lambda^{z(1-z)}}{z(1-z)!}$

Claim Number Distribution

Sedikitnya terdapat tiga kasus spesial yang biasa digunakan dalam asuransi. Distribusi Poisson (λ) adalah contoh paling terkenal untuk distribusi banyaknya klaim. Distribusi Negatif Binomial (n, p) adalah distribusi terkenal lainnya yang sering digunakan untuk menghitung banyaknya klaim.

Dalam tulisan ini banyaknya klaim dihitung dengan menggunakan distribusi Poisson (λ), dimana:

$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, ...$ dengan parameter $\lambda > 0$ (Rolski, T., 1999: 610)

Nilai dari E(N) dan Var (N) adalah:

$E(N) = \lambda$ dan $Var(N) = \lambda$ (Rolski, T., 1999: 611)

Dapat dihitung nilai indeks dispersinya:

$$I_N = \frac{Var(N)}{E(X)}$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda}$$
$$= 1$$

Jadi, index dispersi untuk distribusi Poisson adalah 1.

Untuk $I_N > 1$ disebut distribusi *overdispersion*, sedangkan untuk $I_N < 1$ disebut distribusi *underdispersion*.

Panjer's Recurrence Relation

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1,} \qquad k = 1, 2, ...$$

(Klugman, S & Panjer, H., 2006: 87).

Penghitungan Rekurensi Panjer untuk $N \sim Poisson(\lambda)$:

$$p_1 = (a+b)e^{-\lambda}\lambda$$
$$p_2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$
$$p_3 = \left(a + \frac{b}{3}\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}$$

.

.

.

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Jika $a = 0, b = k$; maka $N \sim Poisson(\lambda)$ *truncated at zero*.

$$\Pr\left(N = k \middle| N \geq 1\right) = \frac{\lambda^k}{k!\left(e^{\lambda} - 1\right)} \qquad ; k = 1, 2, ...$$

Recursive Computation Methods

The Individual Model: De Pril's Algorithm

Diberikan model individual yang mendeskripsikan portfolio dari n polis asuransi yang independen. Diasumsikan bahwa setiap polis mempunyai jumlah klaim individual yaitu perkalian beberapa integer random dari unit moneter. Lebih lanjut, diasumsikan bahwa portfolio dapat dibagi dalam banyaknya kelas dari semua polis yang memiliki probabilitas klaim yang sama dan jumlah distribusi klaim bersyarat yang sama.

Misalkan n_{ij} adalah banyaknya polis dengan probabilitas klaim $\theta_j < 1$ dan jumlah distribusi klaim bersyarat $p_1^{(i)}, ..., p_m^{(i)}$, menunjukkan distribusi jumlah klaim individual F_{ij} masing-

masing polis yang diberikan oleh *mixture* $F_{ij} = \left(1-\theta_j\right)\delta_0 + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)}\delta_k$

Fungsi pembangkit $\hat{g}(z)$ dari jumlah besaran klaim (*the aggregate claim amount*) X^{ind} dalam model ini adalah:

$$\hat{g}(z) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} z^k\right)^{n_{ij}}$$

Dengan a adalah banyaknya distribusi bersyarat dari jumlah klaim dan b adalah banyaknya perbedaan distribusi klaim.

Misalkan distribusi $F_{X_{ij}}$ dari X_i mixture, dimana $N \sim POISSON\left(\lambda \in (0,1)\right)$ adalah:

$$F_{X_{ij}}(x) = \left(1-\theta_j\right)\delta_0 + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)}\delta_k$$
$$= \left(1-\theta_j\right)\delta_0 + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k\ (i)}}{k!}\delta_k$$

Fungsi pembangkit $\hat{g}(z)$ dari jumlah besaran klaim (*the aggregate claim amount*) X^{ind} dalam model ini adalah:

$$\hat{g}(z) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} z^k\right)^{n_{ij}}$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k\ (i)}}{k!} z^k\right)^{n_{ij}}$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda i}}{k!}\left(\lambda z\right)^k\right)^{n_{ij}}$$

Penghitungan probabilitas $p_k(z) = \Pr\left(X^{ind} = z\right)$ rekursif untuk $z = 0,1,...,m$; dimana $m = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} m_i$ yang menghasilkan jumlah besaran klaim yang maksimal, adalah:

$$p_k(0) = \Pr\left(X^{ind} = 0\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda i}}{k!}\left(\lambda z\right)^k\right)^{n_{ij}}$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \frac{e^{-\lambda i}}{k!}\left(\lambda (0)\right)^k\right)^{n_{ij}}$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j\right)^{n_{ij}}$$

Dan

$$p_k(0) = \Pr\left(X^{ind} = z\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda i}}{k!}\left(\lambda z\right)^k\right)^{n_{ij}}$$

dengan $z = 1, 2, ..., m$

5. KESIMPULAN

Jika n_{ij} adalah banyaknya polis dengan probabilitas klaim $\theta_j < 1$ dan jumlah distribusi klaim bersyarat $p_1^{(i)}, ..., p_m^{(i)}$, menunjukkan distribusi jumlah klaim individual F_{ij} masing-masing polis yang diberikan oleh *mixture* $F_{ij} = \left(1-\theta_j\right)\delta_0 + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)}\delta_k$

Fungsi pembangkit $\hat{g}(z)$ dari jumlah besaran klaim (*the aggregate claim amount*) X^{ind} dalam model ini adalah:

$$\hat{g}(z) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} p_k^{(i)} z^k\right)^{n_{ij}}$$

Fungsi inilah yang kemudian akan digunakan menentukan jumlah besaran klaim dengan asumsi distribusi yang diinginkan, yang secara rekursif diperoleh

$$p_k(0) = \Pr\left(X^{ind} = z\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\left(1-\theta_j + \theta_j \sum_{k=1}^{m_i} \frac{e^{-\lambda i}}{k!}\left(\lambda z\right)^k\right)^{n_{ij}}$$

dengan $z = 1, 2, ..., m$

6. DAFTAR PUSTAKA

1. Klugman, S. & Panjer, H. 2006. *Loss Model*, John Wiley & Sons Ltd.
2. Roussas, G., G. 1997. *A Course in Mathematical Statistics, 2nd Edition*. Academic Press.
3. Rolski, T. dkk. 1999. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons Ltd.
4. Ross, S., M. 2007. Introduction to Probability Model, 9th Edition, Elsevier Inc.
5. Zuharioh, F., 2015. Perhitungan Premi dengan Asumsi Waktu Antar Klaim Berdistribusi Eksponensial. *Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, *2*(1).