INVENTORY DAN TRANSPORTASI PADA JARINGAN BERKENDALA MENGGUNAKAN SIMULTANEOUS OPTIMIZATION METHOD

Wahyu Sri Utami[i]

[i] *Prodi Teknik Informatika, Universitas Teknologi Yogyakarta, wahyu.utami@uty.ac.id*

ABSTRAK, Perlakuan terhadap material mulai dari titik produksi (*source*) sampai sebagai produk di titik konsumsi (*sink*) jika tidak dikelola secara profesional biasanya akan memerlukan biaya yang relatif cukup tinggi bagi perusahaan. Hal ini merupakan masalah yang krusial untuk diselesaikan. Permasalahan yang ditimbulkan pada dasarnya adalah kombinasi dari permasalahan produksi, transportasi dan bagaimana menentukan order yang ekonomis. Secara tradisional tahap-tahap dalam pemrosesan material tersebut dioptimasi secara terpisah. Akan tetapi, semakin banyak titik sumber dan titik tujuan, maka tidak akan praktis lagi jika harus dioptimasi terpisah. Sehingga dalam penelitian ini digunakan metode optimasi simultan yang mengintegrasikan seluruh proses tersebut kedalam suatu bentuk model logistik yang tidak linear kemudian akan dioptimasi secara simultan. Fungsi objektifnya adalah meminimalkan total biaya inventory, produksi dan transportasi dengan kendala terbatasnya stok persediaan dan permintaan yang harus terpenuhi. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa dengan menggunakan optimasi simultan, biaya yang dikeluarkan lebih rendah dibandingkan jika menggunakan metode optimasi secara tradisional.

***Kata Kunci**: inventory, produksi, transportasi, order, metode optimasi terpisah, metode optimasi simultan*

1. PENDAHULUAN

Metode riset operasi (*operation research*) yang pada prinsipnya berisi berbagai tehnik kuantitatif yang banyak dipakai dalam pengambilan-pengambilan keputusan manajemen (Pangestu Subagyo, 1992). Permasalahan peminimalan biaya pada jaringan rantai persediaan, dimana untuk meminimalkan biaya inventory, produksi dan transportasi secara tradisional dihitung (dioptimasi) secara terpisah (Julian Benjamin, 1989). Pemrosesannya dimulai dari produksi di titik *source*, kemudian disimpan sebagai persediaan sampai sikirimkan ke titik *sink*. Permasalahan yang mempunyai lebih banyak sumber dan tujuan akan menjadi tidak efisien jika dikerjakan secara terpisah, sehingga pada penelitian ini penulis ingin menggunakan suatu metode efektif untuk menyelesaikan permasalahan tersebut secara keseluruhan yang disebut *simultaneous optimization method* (Julian Benjamin, 1989), dan kemudian membandingkan solusi yang diperoleh dari metode tersebut dengan solusi yang diperoleh dari metode optimasi secara terpisah maupun konvensional.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Persoalan utama dalam pengelolaan persediaan ini terkandung dalam dua pertanyaan utama, yaitu: berapa banyak harus disediakan dan kapan penyediaan itu dilakukan. (Imam K., 2003). Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah berapa banyaknya barang yang harus di produksi dan di order agar total biaya yang dikeluarkan mulai dari titik *source* sampai titik *sink* menjadi minimum.

Permasalahan dirumuskan kedalam model persediaan independen, yaitu model dengan penentuan jumlah pembelian bahan atau barang yang bersifat bebas. Biasanya diaplikasikan untuk pembelian persediaan di mana permintaannya bersifat kontinyu dari waktu ke waktu dan konstan sehingga hanya ada beberapa model inventory yang sesuai dan memenuhi kondisi tersebut, yaitu:

1) *Economic Order Quantity* (*EOQ*)
2) *Economic Production Quantity* (*EPQ*)
3) *The Quantity Discount Model*

Karena diasumsikan tidak ada diskon, sehingga hanya model 1 dan 2 yang akan digunakan guna menyelesaikan permasalahan dalam penelitian ini.

MODEL ECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ)

Total biaya tahunan (*total annual cost*) untuk model EOQ berasal dari *holding cost* ditambah dengan *order cost*.

$$TC = \frac{1}{2}\sqrt{2DOH} + \sqrt{\frac{HDO}{2}} \qquad (2.1)$$

dimana,

TC = *total cost*

H = *holding cost* per unit

D = total permintaan (*demand*) per satuan waktu

O = *order cost* per order

MODEL ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY (EPQ)

Sedangkan total biaya untuk model EPQ diperoleh dari penjumlahan *holding cost* dengan *set up cost.*

$$TC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2DSP}{(P-D)H}}\left(1-\frac{D}{P}\right)H + \sqrt{\frac{(P-D)H}{2DSP}}DS \qquad (2.2)$$

dimana,

TC = *total cost*

H = *holding cost* per unit

D = total permintaan (*demand*) per satuan waktu

P = laju produksi per satuan waktu

S = *set-up cost* per unit

MODEL BIAYA TRANSPORTASI

Secara umum permasalahan transportasi disumuskan menjadi model *transportation cost* sebagai berikut :

$$Transportation\ cost = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \qquad (2.3)$$

Dengan C_{ij} biaya transport per unit barang yang dkirimkan dari titik *source* i ke titk *sink* j dan X_{ij} adalah banyaknya unit barang yang dkirimkan dari titik *source* i ke titk *sink* j. (Wayne L. Winston, 1994)

3. METODOLOGI

Proses yang dilakukan dalam penelitian ini dilakukan dengan urutan sebagai berikut:

1. Membentuk model *total logistic problem* mulai di titik *source* sampai ke titik *sink.*
2. Mencari solusi optimal menggunakan metode konvensional atau *traditional optimization method.*
3. Mencari solusi optimal menggunakan metode heuristik (Julian Benjamin, 1989) untuk problem multi *source* dan multi *sink.*
4. Untuk memperjelas hasil yang diperoleh dalam pembahasan diberikan simulasi numeric dan digunakan *software* LINGO untuk mempermudah penyelesaian dalam penentukan solusi terbaik dari tiap-tiap metode.

4. PEMBAHASAN

MEMBENTUK MODEL TOTAL LOGISTIC PROBLEM

Total biaya di titik *source* adalah hasil penjumlahan biaya produksi, *holding costs* dan *set-up cost* menjadi persamaan berikut ini:

$$f_1(z_1,\ldots\ldots,z_m,X_{11},\ldots\ldots,X_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\left(r_i S_i + \frac{z_i}{2}\left(1-\frac{S_i}{P_i}\right)H_i + \frac{S_i}{z_i}K_i + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) \qquad (4.1)$$

dimana,

f_1 = total biaya di titik *source*

r_i = biaya produksi per unit di titik produksi i

S_i = kapasitas produksi tahunan di titik *source* i, ditentukan terlebih dahulu untuk analisis

H_i = *holding cost* di titik *source* i

P_i = laju produksi tahunan di titik *source* i

z_i = jumlah produksi di titik produksi i

K_i = *set up cost* di titik produksi i

X_{ij}= jumlah unit barang yang akan dikirim dari titik *source* i ke titik *sink* j per order

Biaya transportasi merupakan suatu bentuk fungsi persamaan linear sebagai berikut:

$$f_2(Y_{11},\ldots\ldots\ldots,Y_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}Y_{ij} \qquad (4.2)$$

dimana,

f_2 = total biaya transportasi

C_{ij} = biaya transportasi per unit dari titik *source* i ke titik *sink* j

Y_{ij} = jumlah unit yang akan dikirim dari titik *source* i ke titik *sink* j per tahun.

Karena tidak ada proses produksi, maka total biaya di titik *sink* hanya memuat biaya *inventory* saja. Biaya *inventory* di titik *sink* dirumuskan sebagai persamaan berikut

$$f_3(X_{11},\ldots\ldots,X_{mn},Y_{11},\ldots\ldots,Y_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_{ij}}{2}G_j + \frac{Y_{ij}}{(0,001+X_{ij})}I_j\right) \qquad (4.3)$$

dimana,

f_3 = total biaya di titik *sink*

G_j = *holding cost* di titik *sink* j

I_j = *order cost* di titik *sink* j

X_{ij} = jumlah unit barang yang akan dikirim dari titik *source* i ke titik *sink* j per order

Y_{ij} = jumlah unit yang akan dikirim dari titik *source* i ke titik *sink* j per tahun.

Sehingga total biaya keseluruhan proses mulai dari titik *source* sampai titik *sink* dirumuskan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} W &= f_1(z,X) + f_2(Y) + f_3(X,Y) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(r_iS_i + \frac{z_i}{2}\left(1-\frac{S_i}{P_i}\right)H_i + \frac{S_i}{z_i}K_i + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}Y_{ij} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_{ij}}{2}G_j + \frac{Y_{ij}}{(0,001+X_{ij})}I_j\right) \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Fungsi biaya 4.4 merupakan total model *logistic problem* yang akan diminimalkan. Apabila kapasitas *supply* yang terbatas dan permintaan yang harus dipenuhi diperhitungkan, maka formulasi problem menjadi:

Minimize $_{z_1,X_{ij},Y_{ij}}$

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{m}\left(r_iS_i + \frac{z_i}{2}\left(1-\frac{S_i}{P_i}\right)H_i + \frac{S_i}{z_i}K_i + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\right) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}Y_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{X_{ij}}{2}G_j + \frac{Y_{ij}}{(0,001+X_{ij})}I_j\right) \end{aligned}$$

$$\textit{Subject to}: \sum_{i=1}^{m}Y_{ij} = D_j, \qquad \sum_{j=1}^{n}Y_{ij} = S_i, \qquad (4.5)$$

$0 \le z_i \le S_i$ untuk setiap i; $0 \le X_{ij} \le Y_{ij}$ untuk setiap i dan j;

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (4.6)$$

dimana ,

D_j =permintaan tahunan di titik *sink* j

S_i =kapasitas produksi tahunan di titik *source*

Baik D_j dan S_j keduanya di tentukan terlebih dahulu untuk analisis.

Menentukan Solusi Optimum untuk Problem Produksi-Transportasi-*Inventory* pada Sistem Multi *Source* dan Multi *Sink* Menggunakan Metode Konvensional.

Perhitungan untuk problem ini telah mencakup pembahasan pada problem satu *source* satu *sink*. Akan dihitung total biaya yang dikeluarkan untuk proses produksi di titik *source* i (i =1,2,3,…m), biaya transportasi dan biaya di titik *sink* j (j =1,2,3,…n).

T*otal cost* optimum sementara di titik *source* adalah:

$$TC_s = \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S_iP_iK_i}{(P_i - S_i)H_i}}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right)H_i + \sqrt{\frac{(P_i - S_i)H_i}{2S_iP_iK_i}}S_iK_i + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}}\right) \right) \quad (4.1.1)$$

Untuk mencari biaya pendistribusian barang dari tiap–tiap titik *source* ke tiap–tiap titik *sink* digunakan rumus *transportation cost* yang sama dengan persamaan (3.16) yaitu:

$$\textit{Total transportation } \text{cost} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}Y_{ij}$$

$$\forall_i,\ i = 1,2,\ldots m$$
$$\forall_j,\ j = 1,2,\ldots n \quad (4.1.2)$$

Total cost minimum di titik *sink* diperoleh rumus sebagai berikut:

$$TC_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{G_j}{2}\left(\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}}\right) + \frac{Y_{ij}I_j}{0{,}001 + \sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}}} \right) \quad (4.1.3)$$

Untuk memperoleh total biaya mulai dari titik *sink* sampai ke titik *source*, dihitung dengan menjumlahkan solusi-solusi yang telah diperoleh di tiap-tiap titik. Total biaya keseluruhan terdiri dari total biaya di titik *source*, total biaya transportasi, dan total biaya di titik *sink*. Sehingga total biaya keseluruhan dapat dituliskan oleh persamaan berikut ini:

$$\textit{Total}\,\text{cost} = TC_S + \textit{Transportation Cost} + TC_K$$

$$\textit{Total}\,\text{cost} = \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2S_iP_iK_i}{(P_i - S_i)H_i}}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right)H_i + \sqrt{\frac{(P_i - S_i)H_i}{2S_iP_iK_i}}S_iK_i + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}}\right) \right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij}Y_{ij} + \frac{G_j}{2}\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}} + \frac{Y_{ij}I_j}{0{,}001 + \sqrt{\frac{G_j}{2Y_{ij}I_j}}} \right) \quad (4.1.4)$$

Persamaan 4.1.4 adalah persamaan multi variabel, sehingga dengan menyederhanakan persamaan tersebut, diperoleh persamaan yang meminimalkan biaya dengan kendala kapasitas *supply* yang terbatas dan permintaan yang harus dipenuhi.

Minimize

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(r_iS_i + 2\sqrt{\frac{(P_i - S_i)S_iK_iH_i}{2P_i}} + \frac{H_i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_j}{G_j}}\right)\right) +$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(C_{ij}Y_{ij} + \frac{G_j}{2}\sqrt{\frac{2Y_{ij}I_{ij}}{G_j}} + \frac{Y_{ij}I_j}{0{,}001 + \sqrt{\frac{G_j}{2Y_{ij}I_j}}} \right)$$

$$\textit{Subject to}: \sum_{i=1}^{m} Y_{ij} = D_{j'},$$
$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = S_i, \quad (4.1.5)$$

$0 \le z_i \le S_i$ untuk setiap i; $0 \le X_{ij} \le Y_{ij}$ untuk setiap i dan j; $\sum S_i = \sum D_j$.

Untuk menyelesaikan bentuk persamaan dengan kendala seperti persamaan diatas pada dasarnya dapat diselesaikan secara manual menggunakan metode pengali *Lagrange*. Akan tetapi untuk permasalahan multi source dan multi sink yang lebih besar, tidak memungkinkan lagi jika harus diselesaikan secara manual, sehingga digunakan *software Lingo* untuk mempermudah mendapatkan solusi.

Menentukan Solusi Optimum untuk Problem Produksi-Transportasi-*Inventory* pada Sistem Multi *Source* dan Multi *Sink* Menggunakan Metode Optimasi Simultan dengan Heuristik.

Pada penelitian ini, untuk menyelesaikan problem produksi-transportasi-*inventory* multi *source* dan multi *sink* digunakan metode simultan *Heuristic* (Julian Benjamin, 1989). Pada metode ini, fungsi objektif dan kendala pada persamaan 4.1.5 akan diselesaikan secara simultan dengan terlebih dahulu mengoptimasi variabel z_i dan variabel X_{ij} pada persamaan W. Dan hanya pada persaman W yang terdiri dari variabel-variabel X_{ij} dan Y_{ij} tersebut yang kemudian akan dioptimasi bersama secara heuristik. Metode ini disebut sebagai *Simultaneous Solution Procedures***.**

$$W = \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{z_i}{2}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right) H_i + \frac{S_i}{z_i} K_i + \frac{H_i}{2} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} Y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_{ij}}{2} G_j + \frac{Y_{ij}}{\left(0,001 + X_{ij}\right)} I_j \right) \quad (4.2.1)$$

Variabel z_i dihitung terpisah dari persamaan W dan kemudian diselesaikan menggunakan optimasi klasik sebagai suatu bentuk fungsi *Economic Production Lot Size Problem* dan diperoleh solusi untuk z_i adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = 0 \quad , \quad \forall_i, i = 1,2,...m$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right) H_i - \frac{S_i}{z_i^2} K_i = 0 \quad \forall_i, i = 1,2,...m$$

$$z_i = \sqrt{\frac{2 S_i P_i K_i}{(P_i - S_i) H_i}} \quad , \quad \forall_i, i = 1,2,...m \quad (4.2.2)$$

z_i adalah banyaknya barang yang harus diproduksi di titik *source* i agar biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan minimum.

Kemudian mendefferensial-kan W terhadap X_{ij} secara terpisah dan menyamadengankan nol, akan diperoleh solusi untuk X_{ij}.

$$W = \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{z_i}{2}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right) H_i + \frac{S_i}{z_i} K_i + \frac{H_i}{2} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} Y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_{ij}}{2} G_j + \frac{Y_{ij}}{\left(0,001 + X_{ij}\right)} I_j \right) \quad (4.2.3)$$

Dengan menggunakan metode optimasi klasik untuk mendapatkan X_{ij}.

$$\frac{\partial W}{\partial X_{ij}} = 0 \quad \forall_i, i = 1,2,...m, \forall_j, j = 1,2,...n$$

$$\frac{H_i}{2} + \frac{G_j}{2} - \frac{I_j Y_{ij}}{(0,001 + X_{ij}^{2})} = 0 \quad \forall_i, i = 1,2,...m, \forall_j, j = 1,2,...n \quad (4.2.4)$$

Maka diperoleh solusi untuk X_{ij} sebagai berikut:

$$X_{ij} = \sqrt{\frac{2 I_j Y_{ij}}{(G_j + H_i)}} - 0,001 \quad \forall_i, i = 1,2,...m, \quad \forall_j, j = 1,2,...n \quad (4.2.5)$$

Pada persamaan 4.2.5, jika Y_{ij} bernilai nol (tidak terjadi pengiriman), maka pastinya X_{ij} juga bernilai nol (tidak terjadi order). Akan tetapi karena terjadi pengurangan 0,001 maka nilai X_{ij} yang diperoleh pada persamaan akan bernilai negatif dan solusi menjadi tidak terdefinisi. Sehingga persamaan untuk mendapatkan nila X_{ij} yang positif adalah tanpa pengurangan 0,001. Maka diperoleh solusi untuk X_{ij} sebagai berikut:

$$X_{ij} = \sqrt{\frac{2 I_j Y_{ij}}{(G_j + H_i)}} \quad \forall_i, i = 1,2,...m, \quad \forall_j, j = 1,2,...n \quad (4.2.6)$$

X_{ij} adalah batas bawah awal yang akan digunakan untuk menemukan solusi akhir.

Fungsi objektif W menjadi suatu bentuk fungsi linear terhadap Y_{ij}.

Solusi optimum untuk Y_{ij} dapat diperoleh dengan menyelesaikan program linear pada persamaan berikut.

$$\textit{Minimize} \quad W' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} Y_{ij}$$

$$\textit{subject to}: \sum_{i=1}^{m} Y_{ij} = D_j \qquad \forall_i, i = 1,2,...m$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = S_i \qquad \forall_j, j = 1,2,...n \quad (4.2.7)$$

Dimana koefisian A pada persamaan diatas adalah:

$$A_{ij} = \left(C_{ij} + \frac{I_j}{(0,001 + X_{ij})} \right) , \quad \forall_i, i = 1,2,...m \quad \forall_j, j = 1,2,...n \quad (4.2.8)$$

Pada persamaan 4.2.8 variabel X_{ij} ditambah dengan 0,001 agar tidak terjadi pembagian dengan nol jika X_{ij} bernilai nol.

Sehingga persamaan (4.2.8) adalah meminimumkan fungsi W' pada saat A_{ij}

disubstitusi. Diperoleh biaya optimumnya sebagai berikut:

$$W^* = f_1 + W' \qquad (4.2.9)$$

Solusi–solusi yang telah diperoleh pada persamaan diatas, belum cukup untuk menyelesaikan *Simultaneous Solution Procedures*. Untuk memperoleh solusi akhir yang optimum, digunakan algoritma yang dianggap efisien dan solusi yang diperoleh mendekati nilai optimum sebenarnya. Dalam Tugas Akhir ini, penulis menggunakan metode *Heuristic* (Julian Benjamin, 1989) untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Metode ini akan menggabungkan solusi–solusi yang telah diperoleh pada persamaan (4.2.6), (4.2.7), dan (4.2.8) untuk mencari solusi akhirnya.

Langkah – langkah dalam metode *heuristic* adalah sebagai berikut:

1. Menentukan solusi untuk z_i yang telah dihitung pada persamaan (4.2.2).
2. Menentukan solusi fesibel awal untuk Y_{ij} dengan mencari nilai minimum dari S_i dan D_j, Y_{ij}^0 = Minimum[S_i, D_j]. Ambil nilai awal t=0
   a. Mensubstitusi Y_{ij}^t ke persamaan (4.2.5) dan diperoleh nilai awal untuk X_{ij}^t.
   b. Menentukan solusi fesibel lokal optimum dengan langkah – langkah sebagai berkut:
      1. Menghitung nilai untuk koefisien A_{ij}^t dengan mensubstitusi X_{ij}^t ke persamaan (4.2.8).
      2. Menentukan solusi fesibel baru Y_{ij}^{t+1} dengan mensubstitusi A_{ij}^t kedalam persamaan (4.1.5) dan menyelesaikannya sebagai suatu bentuk pemrograman linear.
      3. Menghitung X_{ij}^{t+1} dengan mensubstitusi Y_{ij}^{t+1} ke persamaan (4.2.5).
      4. Menentukan nilai dari fungsi objektif yang baru W^{t+1} dengan mensubstitusi z_i, X_{ij}^{t+1}, dan Y_{ij}^{t+1} kedalam persaman (4.2.1).
   c. Stop iterasi jika $Y_{ij}^{t+1} = Y_{ij}^t$. Jika tidak ambil t = t + 1 kemudian kembali ke langkah no 2b.
3. W* = Minimum [W^t].

Untuk mengaplikasikan algoritma diatas, dapat dikerjakan secara manual. Akan tetapi untuk permasalahan yang semakin banyaknya titik *source* dan titik *sink*, maka tidak akan praktis lagi jika harus dikerjakan secara manual. Sehingga dalam pengerjaan tugas akhir ini penulis menggunakan *software* LINGO untuk mempermudah pengerjaannya. LINGO adalah suatu *software* yang dapat menyelesaikan permasalahan optimisasi yang berbentuk persamaan linear maupun non linear. LINGO memperingkas pengerjaan suatu problem pemrograman linear maupun nonlinear, dengan memasukkan model tersebut kemudian menyelesaikannya sampai diperoleh solusi optimum, dan menganalisa hasil optimum tersebut. Untuk lebih memahami tentang kegunaan LINGO, diberikan contoh dengan bentuk permasalahan multi *source* dan multi *sink*.

Contoh Problem multi *source* dan multi *sink*

Diberikan 3 anak perusahaan yang memproduksi satu jenis item dan 4 distributor yang akan menerima item dari tiap-tiap perusahaan penyuplai. Diketahui biaya produksi per unit di masing-masing titik produksi adalah (r_i), r_1=\$5, r_2=\$3, r_3=\$6. Laju produksi tahunan untuk masing-masing titik *source* adalah: P_1=38000, P_2=37700, P_3=59000. Besarnya *demand*, *suppply*, biaya inventory dan biaya transportasi diberikan pada tabel-tabel diawah ini.

Tabel 1. Biaya transportasi (\$/unit) dari titik *source* (*i*) ke titik *sink* (*j*)

Source (*i*)	*Sink* (*j*)			
	A	B	C	D
I	1,33	0,69	0,53	-
II	0,98	1,23	1,68	-
III	-	-	1,13	0,30

Tabel 2. Kapasitas tahunan dan biaya *inventory* di titik *source*

Parameter	I	II	III

Kapasitas tahunan (unit/tahun)	37000	37000	58000
Set up cost ($/produksi)	5000	5000	5000
Holding cost ($/unit/tahun)	0,10	0,10	0,10

Tabel 3. Permintaan tahunan dan biaya inventory di titik *sink*

Parameter	A	B	C	D
Permintaan tahunan (unit/tahun)	12000	9000	109000	2000
Order cost ($/order)	20	20	20	20
Holding cost ($//unit/tahun)	0,12	0,12	0,12	0,12

Perusahaan ingin menghitung besarnya produksi barang dan besarnya order yang harus dikirim dari tiap-tiap titik *source* i ke tiap-tiap titik *sink* j tiap tahunnya agar biaya yang dikeluarkan minimum serta banyaknya order dalam setahun yang harus dipenuhi.

Penyelesaian menggunakan metode konvensional.

Diperoleh jumlah barang yang harus diproduksi di masing-masing titik *source* i adalah:

$$z_1 = \sqrt{\frac{2x37000x38000x5000}{(38000-37000)x0,1}} \approx 374967$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{2x37000x37700x5000}{(37700-37000)x0,1}} \approx 446398$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{2x58000x59000x5000}{(59000-58000)x0,1}} \approx 584979$$

Dimana z_i adalah banyaknya barang yang harus diproduksi di titik *source* i agar biaya produksi yang dikeluarkan oleh perusahaan menjadi minimum.

Solusi Y_{ij} akan dicari menggunakan *software* LINGO, diperoleh:

$Y_{11}=0$	$Y_{23}=16000$
$Y_{12}=0$	$Y_{24}=0$
$Y_{13}=37000$	$Y_{31}=0$
$Y_{14}=0$	$Y_{32}=0$
$Y_{21}=12000$	$Y_{33}=56000$
$Y_{22}=9000$	$Y_{34}=2000$

Dengan menggunakan LINGO diperoleh output total biaya optimumnya adalah $ 782504,5. Selanjutnya dihitung nilai X_{ij} yaitu jumlah barang yang di order dari titik *source* i ke titik *sink* j dengan mensubstitusi Y_{ij} yang telah diperoleh sebelumnya. Sedangkan dengan menggunakan metode konvensional, diperoleh biaya minimum yang harus dikeluarkan oleh perusahaan sebesar $782504,5 dimana order optimumnya adalah X_{ij} dan jumlah barang yang harus dikirim per tahunnya adalah Y_{ij}.

Penyelesaian problem multi source dan multi sink menggunakan metode heuristik.

Persoalan akan diselesaikan sesuai metode heuristik (Julian Benjamin, 1989), dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menghitung nilai z_i.

$$z_i = \sqrt{\frac{2S_iP_iK_i}{(P_i - S_i)H_i}} \qquad \forall_i, i = 1,2,3$$

$$z_1 = \sqrt{\frac{2x37000x38000x5000}{(38000-37000)x0,1}} = 374966,7$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{2x37000x37700x5000}{(37700-37000)x0,1}} = 446398,3$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{2x58000x59000x5000}{(59000-58000)x0,1}} = 584978,6$$

2. Misal t = 0, akan dihitung Y_{ij}^0 sebagai solusi fesibel awal.
   a. Dengan mensubstitusi Y_{ij}^0 ke persamaan berikut:

$$X_{ij} = \sqrt{\frac{2I_jY_{ij}}{(G_j + H_i)}} \qquad \forall_{i,j}, i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4$$

diperoleh nilai untuk X_{ij}^0:

b. Mencari solusi fesibel awal.

Iterasi 1

- .Menghitung nilai untuk koefisien A_{ij}^0 dengan mensubstitusi X_{ij}^0 ke persamaan berikut:

$$A_{ij} = \left(C_{ij} + \frac{I_j}{(0{,}001 + X_{ij})} \right),$$
$$\forall_i, i = 1,2,3,$$
$$\forall_j, j = 1,2,3,4$$

- Menentukan solusi fesibel baru Y_{ij}^1 dengan mensubstitusi A_{ij}^0 ke dalam persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad W' = & 1{,}343540Y_{11}^1 + 0{,}7056347Y_{12}^1 + 0{,}5377110Y_{13}^1 \\ & + 0{,}9935401Y_{21}^1 + 1{,}245635Y_{22}^1 + 1{,}68771Y_{23}^1 \\ & + 1{,}136159Y_{33}^1 + 0{,}3331662Y_{34}^1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \textit{subject to}: \ & Y_{11}^1 + Y_{21}^1 = 12000 \\ & Y_{12}^1 + Y_{22}^1 = 9000 \\ & Y_{13}^1 + Y_{23}^1 + Y_{33}^1 = 109000 \\ & Y_{34}^1 = 2000 \\ & Y_{11}^1 + Y_{12}^1 + Y_{13}^1 = 37000 \\ & Y_{21}^1 + Y_{22}^1 + Y_{23}^1 = 37000 \\ & Y_{33}^1 + Y_{34}^1 = 58000 \end{aligned}$$

Persamaan diatas diselesaikan menggunakan *software* LINGO dan diperoleh solusinya yaitu Y_{ij}^1.

- Menghitung X_{ij}^1 dengan mensubstitusi Y_{ij}^1.
- Dengan mensubstitusi z_i, X_{ij}^1, Y_{ij}^1, C_{ij}, S_i, K_i, H_i, P_i, I_j, G_j, dan D_j kedalam persaman (4.2.1) diperoleh W^1 adalah:

$$\begin{aligned} W^1 = & \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{z_i}{2}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right) H_i + \frac{S_i}{z_i} K_i + \frac{H_i}{2} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^1 \right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} Y_{ij}^1 + \\ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_{ij}^1}{2} G_j + \frac{Y_{ij}^1}{\left(0{,}001 + X_{ij}^1\right)} I_j \right) \end{aligned}$$

= 782394

c. Karena diperoleh nilai $Y_{ij}^1 \neq Y_{ij}^0$, maka harus kembali ke langkah no 2b, sehingga menjadi penghitungan untuk iterasi 2.

Iterasi 2

- Menghitung nilai untuk koefisien A_{ij}^1 dengan mensubstitusi X_{ij}^1.
- Menentukan solusi fesibel baru Y_{ij}^2 dengan mensubstitusi A_{ij}^1 ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned} \textit{Minimaze} \quad W' = & 20001{,}33Y_{11}^{\ 2} + 20000{,}69Y_{12}^{\ 2} + 0{,}5377110Y_{13}^{\ 2} \\ & + 0{,}9935401Y_{21}^{\ 2} + 1{,}245635Y_{22}^{\ 2} + 1{,}691726Y_{23}^{\ 2} \\ & + 1{,}136159Y_{33}^{\ 2} + 0{,}3331662Y_{34}^{\ 2} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \textit{subject to}: \ & Y_{11}^{\ 2} + Y_{21}^{\ 2} = 12000 \\ & Y_{12}^{\ 2} + Y_{22}^{\ 2} = 9000 \\ & Y_{13}^{\ 2} + Y_{23}^{\ 2} + Y_{33}^{\ 2} = 109000 \\ & Y_{34}^{\ 2} = 2000 \\ & Y_{11}^{\ 2} + Y_{12}^{\ 2} + Y_{13}^{\ 2} = 37000 \\ & Y_{21}^{\ 2} + Y_{22}^{\ 2} + Y_{23}^{\ 2} = 37000 \\ & Y_{33}^{\ 2} + Y_{34}^{\ 2} = 58000 \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan diatas langsung digunakan *software* LINGO. Dan diperoleh solusi untuk Y_{ij}^2.

- Menghitung X_{ij}^2 dengan mensubstitusi Y_{ij}^2.
- Diperoleh fungsi objektif yang baru W^2 dengan mensubstitusi z_i, X_{ij}^2, Y_{ij}^2, C_{ij}, Si, K_i, H_i, P_i, I_j, G_j, dan D_j ke persamaan:

$$\begin{aligned} W^2 = & \sum_{i=1}^{m} \left(r_i S_i + \frac{z_i}{2}\left(1 - \frac{S_i}{P_i}\right) H_i + \frac{S_i}{z_i} K_i + \frac{H_i}{2} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 \right) + \\ & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} Y_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_{ij}^2}{2} G_j + \frac{Y_{ij}^2}{(0{,}001 + X_{ij}^2)} I_j \right) \end{aligned}$$

= 782394

Karena diperoleh nilai $Y_{ij}^2 = Y_{ij}^1$ maka stop iterasi. $W^* = \text{minimum}[W^{t+1}] = \$\ 782394$.

Dengan menggunakan metode konvensional, biaya yang harus dikeluarkan oleh perusahaan sebesar $782504,5 sedangkan jika menggunakan metode heuristik (Julian Benjamin, 1989) diperoleh total biaya adalah $782394,0. Sehingga perusahaan dapat menghemat biaya sebesar $110,5.

5. KESIMPULAN

Setelah dilakukan perhitungan dengan menyelesaikan sebuah contoh kasus, dapat disimpulkan bahwa proses pencarian solusi menggunakan metode Optimasi Simultan dengan Heuristik dapat menghasilkan total biaya produksi, transportasi dan *inventory* lebih minimum dibandingkan menggunakan Metode Optimasi Konvensional.

Diperoleh jumlah produksi barang dan jumlah pengiriman barang pertahunnya optimum, dengan kata lain jumlah produksi memenuhi permintaan konsumen.

6. SARAN

Dalam proses pencarian solusi pada sistem multi *source* dan multi *sink* diberikan algoritma yang cukup rumit, sehingga dengan menambahkan aplikasi pemrograman yang lebih baik akan sangat membantu dalam perhitungan.

6. DAFTAR PUSTAKA

Benjamin, J. 1989. *An Analysis of Inventory and Transportation Costs in a Constrained Network*: North Carolina: A&T State University.

Imam, K. 2003. *Manajemen Persediaan*: Fakultas Ekonomi Universitas Jember.

(di *dowload* pada 1 Maret 2008). rul2a@yahoo.com

Subagyo, P. dkk. 1992. *Dasar-Dasar Operation Research*, Edisi Kedua. Yogyakarta: penerbit BPFE.

Winston, W. L., 1994, *Operations Research Applications and Algorithms*, edisi ketiga, International Thomson Publisher, California.