

# Solusi Numerik Model MSVIR pada Penyakit Difteri Menggunakan Metode RK4

Ahkhiriani Assyiamanah

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, 60600119040@uin-alauddin.ac.id

Muh. Irwan

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, muhirwan@uin-alauddin.ac.id

Ilham Syata

Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, ilham.syata@uin-alauddin.ac.id

---

**ABSTRAK,** Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui solusi numerik model MSVIR dalam memprediksi kasus penyakit difteri di Indonesia beberapa tahun ke depan. Dalam penelitian ini model matematika yang terbentuk adalah sistem persamaan diferensial non linear yang memuat variabel  $M$  (maternal antibodies),  $S$  (susceptible),  $V$  (vaccinated),  $I$  (infected), dan  $R$  (recovered). Selanjutnya model ini diterapkan pada penyakit difteri di Indonesia dengan data sekunder dari Kemenkes RI tahun 2021. Simulasi dilakukan dengan  $\Delta t = 0,01$  tahun menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan nilai awal yaitu  $M(t_0) = 4.367.228$ ,  $S(t_0) = 266.029.977$ ,  $V(t_0) = 3.482.100$ ,  $I(t_0) = 235$ ,  $R(t_0) = 210$ . Berdasarkan terapan model MSVIR, simulasi menunjukkan laju populasi terinfeksi mengalami penurunan setiap tahun karena meningkatnya kekebalan individu yang telah divaksin. Sedangkan populasi recovered mengalami peningkatan setiap tahun karena adanya populasi yang telah sembuh setelah mendapat perawatan dan mendapat kekebalan setelah divaksin.

---

**Kata Kunci:** Difteri, Model MSVIR, Solusi Numerik

---

## 1. PENDAHULUAN

Pada negara berkembang seperti Indonesia, kesehatan masih menjadi beban utama akibat penyakit menular yang kini menyebar dengan sangat cepat. Salah satunya adalah penyakit menular difteri. Penyakit difteri merupakan jenis penyakit yang sangat menular (*contagious disease*) yang menyerang saluran pernapasan bagian atas. Penyakit ini disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium Diphtheriae* [1].

Difteri telah tersebar di seluruh dunia termasuk Indonesia dan masih menjadi masalah kesehatan serius. Kasus difteri di Indonesia selalu ada dan fluktuatif setiap tahunnya. Menurut World Health Organization (WHO), pada tahun 2011-2015, India memiliki jumlah kasus terbesar yang dilaporkan setiap tahun, dengan total sebanyak 18.350 kasus, diikuti oleh Indonesia dan Madagaskar dengan masing-

masing 3.203 dan 1.633 kasus yang dilaporkan [2]. Kemudian pada periode tahun 2016-2021 terdapat 3311 kasus di Indonesia yang menjadikan Indonesia sebagai negara dengan kasus difteri tertinggi kedua di negara-negara anggota WHO South East Asian Region (SEAR) [3].

Penyakit ini ditandai dengan terjadinya peradangan di tempat infeksi seperti pada selaput mukosa faring, laring, tonsil, hidung, dan kulit. Difteri dapat menyebabkan sumbatan jalan napas, peradangan dan kelumpuhan otot jantung, bahkan kematian sehingga termasuk penyakit yang berbahaya. Penularannya melalui droplet (percikan ludah) dari batuk, bersin, muntah, melalui alat makan, atau kontak langsung dari lesi kulit. Semua kelompok usia bisa tertular penyakit ini, terutama anak-anak yang belum menerima vaksinasi lengkap. Tingkat kematian sekitar 50% jika penderita tidak diobati dan tidak memiliki kekebalan, sedangkan dengan pengobatan sekitar 10% [4].

Menurut Permenkes 1501 tahun 2010, difteri dikategorikan sebagai penyakit yang dapat menimbulkan KLB (Kejadian Luar Biasa)/Wabah. Jika setidaknya 1 kasus suspek difteri ditemukan, maka wilayah tersebut dapat dinyatakan mengalami KLB. Meskipun berbahaya dan cukup mematikan, difteri dapat dicegah dengan melakukan imunisasi berupa pemberian vaksin DPT [4].

Representasi dari dinamika penyebaran suatu penyakit menular dapat dituangkan ke dalam bahasa matematika melalui pemodelan matematika atau dalam bidang kajian disebut juga dengan epidemiologi. Untuk menentukan apakah suatu penyakit menular dapat menjadi endemik atau tidak, digunakan beberapa model penyebaran penyakit [5]. Model tersebut perlu

diformulasi kemudian dicari solusi numeriknya menggunakan metode RK4 [6]. Dengan demikian, model matematika yang terbentuk harus mampu menjelaskan situasi yang sedang diamati [7].

Salah satu model matematika epidemik untuk mengkaji penyebaran penyakit adalah SIR yang diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick. Pada model SIR populasi dibagi menjadi tiga kelompok yaitu kelompok individu yang rentan penyakit (*susceptible*), kelompok individu yang terinfeksi (*infected*), dan kelompok individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit (*recovered*) [8]. Peneliti dapat terus mengembangkan model penyebaran penyakit tersebut sebagai salah satu upaya menekan penularan penyakit. Di antaranya adalah melalui model matematika untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit difteri.

Penelitian tentang model matematika penyebaran penyakit difteri pernah dilakukan oleh [9], dalam penelitiannya model yang dibentuk ialah model MSEIR dimana kompartemen *M* adalah pengaruh imun pasif yang telah ada pada saat baru lahir dan kompartemen *E* adalah periode laten atau masa inkubasi yang berlangsung selama 5 hari. Selain itu, penelitian penyebaran penyakit difteri juga dilakukan oleh [10], dalam penelitiannya menggunakan model SVIR dimana kompartemen *V* yang memperhatikan masa efektivitas vaksin dan kegagalan vaksin. Oleh karena itu, dilakukan penelitian dengan menggabungkan kedua model penyebaran penyakit tersebut, sehingga model yang digunakan yakni model MSVIR (*Maternal antibodies-Susceptible-Vaccinated-Recovered*).

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### Pemodelan Matematika

Suatu sistem yang kompleks dapat dimodelkan secara matematis menggunakan teknik yang disebut pemodelan matematika. Dengan kata lain, pemodelan matematika adalah suatu sistem persamaan yang dapat digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan kompleks yang sedang diamati. Dengan demikian, model matematika yang dibentuk harus mampu mewakili situasi kompleks yang

sedang diamati. Tahapan-tahapan pemodelan matematika adalah sebagai berikut:

- 1) Identifikasi Masalah
- 2) Membuat Asumsi
- 3) Formulasi Model Matematika [11]

### Metode Numerik

Metode numerik merupakan suatu metode dengan menggunakan sekumpulan aritmatik sederhana dan operasi logika pada sekumpulan bilangan atau data numerik yang diberikan untuk memecahkan suatu model matematika.

Algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik adalah algoritma pendekatan maka akan muncul istilah iterasi yang mengacu pada pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain perhitungan dengan metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk mendapatkan hasil yang secara konsisten semakin mendekati solusi penyelesaian yang sebenarnya. Solusi pendekatan jelas tidak identik dengan solusi sebenarnya, sehingga ada selisih diantara keduanya yang disebut dengan galat (*error*) [12].

### Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta orde 4 berbentuk [13]:

$$k_1 = f(x_r, y_r) \quad (2.1)$$

$$k_2 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (2.2)$$

$$k_3 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (2.3)$$

$$k_4 = f(x_r + h, y_r + hk_3) \quad (2.4)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.5)$$

### Penyakit Difteri

Difteri adalah salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri gram positif *Corynebacterium Diphtheriae* yang dapat dicegah melalui imunisasi dengan vaksin DPT (Difteri Pertusis Tetanus). Peradangan pada tempat infeksi, terutama pada selaput mukosa faring, laring, tonsil, hidung, dan kulit merupakan ciri penyakit ini

Manusia adalah satu-satunya reservoir *Corynebacterium Diphtheriae*. Penularan difteri dapat terjadi melalui droplet (percikan ludah) dari batuk, bersin, muntah, melalui alat makan, atau kontak langsung dari lesi di kulit. Gejala difteri muncul 2 hingga 5 hari setelah seseorang

terinfeksi. Namun, tidak semua orang yang terinfeksi difteri menunjukkan gejala. Saat gejala muncul, biasanya berupa terbentuknya lapisan tipis berwarna abu-abu yang menutupi tenggorokan dan amandel penderita. Pada kasus yang lebih berat dapat menyebabkan kesulitan menelan, sesak nafas, stridor dan pembengkakan leher yang menyerupai leher sapi (*bullneck*), bahkan kematian [14].

**Model MSVIR**

Model SIR klasik dapat dimodifikasi menjadi berbagai bentuk model epidemik, untuk penyakit difteri dengan menyertakan pengaruh dari imun pasif yang telah dimiliki pada saat baru lahir dan pengaruh pemberian vaksinasi, sehingga muncul kompartemen M (*maternal antibodies*) untuk populasi yang dilindungi dengan imun pasif dan kompartemen V (*vaccinated*) untuk populasi yang tervaksin. Imun pasif adalah imun yang diperoleh selama dalam kandungan ibu yang disalurkan melalui plasenta, dimana imun pasif ini akan ada pada bayi hingga bayi berusia 6 bulan [15], sedangkan vaksinasi populasi yang diberi vaksin Difteri Pertusis Tetanus (DPT) merupakan salah satu upaya Kementerian Kesehatan untuk mencapai target bebas difteri [16].

Oleh karena itu dibentuk model MSVIR yang menggambarkan lima kompartemen yaitu kelas populasi yang dilindungi dengan imun pasif (*maternal antibodies*), kelas populasi rentan (*susceptible*), kelas populasi tervaksin (*vaccinated*), kelas populasi terinfeksi (*infected*), dan kelas populasi sembuh (*recovered*) [19].

**3. METODOLOGI**

Data penyakit difteri dari Profil Kesehatan Indonesia tahun 2021 yang dirilis oleh Kementerian Kesehatan RI menjadi obyek dari penelitian ini. Model matematika yang digunakan terdiri dari 5 kompartemen yaitu populasi yang dilindungi imun pasif (*Maternal Antibodies*), populasi rentan (*Susceptible*), populasi tervaksin (*Vaccinated*), populasi terinfeksi (*Infected*), dan populasi sembuh/kebal (*Recovered*).

**Prosedur Analisis**

Langkah-langkah analisis yang diterapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membangun model MSVIR penyebaran penyakit difteri
2. Menganalisis solusi numerik model MSVIR penyebaran penyakit difteri dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4
3. Mensimulasikan parameter model MSVIR yang diselesaikan secara numerik

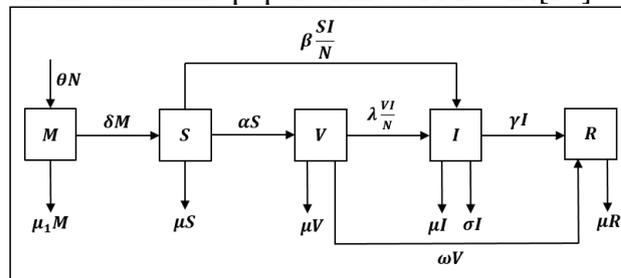
**4. PEMBAHASAN**

**Membangun Model MSVIR**

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk model penyebaran penyakit difteri, yaitu :

1. Populasi konstan (tertutup), artinya  $N = M(t) + S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$
2. Populasi tidak dipengaruhi oleh laju pertumbuhan penduduk (migrasi/imigrasi)
3. Terdapat kelahiran dan kematian dalam populasi
4. Penyakit berbahaya dapat menimbulkan kematian
5. Kontak dengan individu yang terinfeksi merupakan penyebab terjadinya transmisi penyakit
6. Setiap individu baru lahir diasumsikan sehat dan memiliki imun pasif
7. Individu yang telah divaksin akan menjadi kebal/sembuh terhadap penyakit ketika memperoleh imunitas vaksin
8. Individu yang telah divaksin dapat terinfeksi jika tidak mencapai imunitas vaksin dan terjadi kontak dengan individu yang terinfeksi
9. Individu yang dinyatakan sembuh tidak kembali menjadi populasi rentan
10. Semua individu terinfeksi yang tidak meninggal diasumsikan sembuh

Skema dinamika populasi model MSVIR [19]



**Gambar 4. 1** Skema Dinamika Populasi Model MSVIR Penyakit Difteri

Berdasarkan asumsi dan Gambar 2.1 maka model matematika yang terbentuk adalah:

$$\frac{dM}{dt} = \theta N - (\delta + \mu_1)M \tag{4.1}$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta M - \beta \frac{SI}{N} - (\alpha + \mu)S \tag{4.2}$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha S - \lambda \frac{VI}{N} - (\omega + \mu)V \tag{4.3}$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda \frac{VI}{N} + \beta \frac{SI}{N} - (\gamma + \mu + \sigma)I \tag{4.4}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \omega V - \mu R \tag{4.5}$$

**Keterangan**

- $N$  : Total populasi
- $M$  : Jumlah individu yang dilindungi imun pasif
- $S$  : Jumlah individu yang rentan terinfeksi penyakit difteri
- $V$  : Jumlah individu yang tervaksin
- $I$  : Jumlah individu yang terinfeksi penyakit difteri
- $R$  : Jumlah individu yang telah sembuh dan kebal dari penyakit difteri
- $\theta$  : Laju kelahiran
- $\mu$  : Laju kematian alami
- $\mu_1$  : Laju kematian bayi
- $\delta$  : Laju efektivitas imun pasif
- $\beta$  : Laju kontak
- $\alpha$  : Laju vaksinasi
- $\lambda$  : Laju kegagalan vaksin
- $\omega$  : Laju keberhasilan vaksin
- $\sigma$  : Laju kematian karena penyakit difteri
- $\gamma$  : Laju kesembuhan

**Nilai Awal dan Parameter**

Berdasarkan data yang telah diperoleh maka didapatkan nilai awalan untuk setiap variabel pada model MSVIR adalah sebagai berikut:

**Tabel 4. 1** Nilai Awal

| Variabel | Nilai       | Sumber                          |
|----------|-------------|---------------------------------|
| $M_0$    | 4.367.228   | Profil Kesehatan Indonesia 2021 |
| $S_0$    | 266.029.977 |                                 |
| $V_0$    | 3.482.100   |                                 |
| $I_0$    | 235         |                                 |
| $R_0$    | 210         |                                 |

Adapun untuk nilai parameter model MSVIR pada penyakit difteri dapat dilihat pada tabel berikut:

**Tabel 4. 2** Nilai Parameter

| Parameter | Nilai   | Sumber   |
|-----------|---------|--|
| $\theta$  | 0,01595 | Asumsi   |
| $\delta$  | 0,16667 | (Wulandari, 2013)                                    |
| $\mu$     | 0,00286 | Asumsi   |
| $\mu_1$   | 0,00578 | Asumsi   |
| $\beta$   | 0,97134 | (Aryani, 2020)                                       |
| $\alpha$  | 0,01309 |  |
| $\lambda$ | 0,06900 |  |
| $\sigma$  | 0,10638 |  |
| $\gamma$  | 0,89362 | (Widyaningsih, Jasaputra, Saputroc, & Pangadi, 2020) |
| $\omega$  | 0,931   |  |

|           |             |  |
|-----------|-------------|--|
| $N$       | 273.879.750 | Profil Kesehatan Indonesia 2021                      |
| $\theta$  | 0,01595     | Asumsi   |
| $\delta$  | 0,16667     | (Wulandari, 2013)                                    |
| $\mu$     | 0,00286     | Asumsi   |
| $\mu_1$   | 0,00578     | Asumsi   |
| $\beta$   | 0,97134     | (Aryani, 2020)                                       |
| $\alpha$  | 0,01309     |  |
| $\lambda$ | 0,06900     |  |
| $\sigma$  | 0,10638     |  |
| $\gamma$  | 0,89362     | (Widyaningsih, Jasaputra, Saputroc, & Pangadi, 2020) |
| $\omega$  | 0,931       |  |

**Solusi Numerik Model MSVIR Pada Penyakit Difteri**

Model MSVIR yang didapatkan pada persamaan (4.1) sampai (4.5) diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat sehingga diperoleh :

$$M_{r+1} = M_r + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.6}$$

$$S_{r+1} = S_r + \frac{1}{6} h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \tag{4.7}$$

$$V_{r+1} = V_r + \frac{1}{6} h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \tag{4.8}$$

$$I_{r+1} = I_r + \frac{1}{6} h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \tag{4.9}$$

$$R_{r+1} = R_r + \frac{1}{6} h(i_1 + 2i_2 + 2i_3 + i_4) \tag{4.10}$$

Dimana nilai  $k$  adalah kemiringan (*slope*) pada interval variabel  $M$ . Nilai  $k_1$  artinya kemiringan pada titik awal interval, kemiringan ini kemudian digunakan untuk membuat prediksi variabel terikat pada titik tengah interval. Nilai titik tengah ini selanjutnya digunakan untuk menghitung sekumpulan kemiringan pada titik tengah ( $k_2$ ). Kemiringan baru ini kemudian dibawa kembali ke titik awal untuk membuat serangkaian prediksi titik tengah yang

menghasilkan prediksi kemiringan baru di titik tengah ( $k_3$ ). Ini kemudian digunakan untuk membuat prediksi pada akhir interval yang digunakan untuk mengembangkan kemiringan pada akhir interval ( $k_4$ ). Akhirnya, nilai  $k$  digabungkan menjadi satu set fungsi inkremen [seperti pada persamaan (4.6)] dan dibawa kembali ke awal untuk membuat prediksi akhir.

Begitupun untuk nilai  $l$  yang mewakili kemiringan (*slope*) pada interval variabel  $S$ , nilai  $m$  yang mewakili kemiringan (*slope*) pada interval variabel  $V$ , nilai  $n$  yang mewakili kemiringan (*slope*) pada interval variabel  $I$ , dan nilai  $i$  yang mewakili kemiringan (*slope*) pada interval variabel  $R$ .

Dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= \theta N - (\delta + \mu_1)M_r \\ l_1 &= \delta M_r - \beta \frac{S_r I_r}{N} - (\alpha + \mu)S_r \\ m_1 &= \alpha S_r - \lambda \frac{V_r I_r}{N} - (\omega + \mu)V_r \\ n_1 &= \lambda \frac{V_r I_r}{N} + \beta \frac{S_r I_r}{N} - (\gamma + \mu + \sigma)I_r \\ i_1 &= \gamma I_r + \omega V_r - \mu R_r \\ k_2 &= \theta N - (\delta + \mu_1) \left( M_r + \frac{1}{2} h k_1 \right) \\ l_2 &= \delta M_r \left( M_r + \frac{1}{2} h k_1 \right) - \\ &\quad \beta \frac{\left( S_r + \frac{1}{2} h l_1 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right)}{N} - \\ &\quad (\alpha + \mu) S_r \left( S_r + \frac{1}{2} h l_1 \right) \\ m_2 &= \alpha \left( S_r + \frac{1}{2} h l_1 \right) - \\ &\quad \lambda \frac{\left( V_r + \frac{1}{2} h m_1 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right)}{N} - \\ &\quad (\omega + \mu) \left( V_r + \frac{1}{2} h m_1 \right) \\ n_2 &= \lambda \frac{\left( V_r + \frac{1}{2} h m_1 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right)}{N} + \\ &\quad \beta \frac{\left( S_r + \frac{1}{2} h l_1 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right)}{N} - \\ &\quad (\gamma + \mu + \sigma) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right) \\ i_2 &= \gamma \left( I_r + \frac{1}{2} h n_1 \right) + \omega \left( V_r + \frac{1}{2} h m_1 \right) - \\ &\quad \mu \left( R_r + \frac{1}{2} h i_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \theta N - (\delta + \mu_1) \left( M_r + \frac{1}{2} h k_2 \right) \\ l_3 &= \delta M_r \left( M_r + \frac{1}{2} h k_2 \right) - \\ &\quad \beta \frac{\left( S_r + \frac{1}{2} h l_2 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right)}{N} - \\ &\quad (\alpha + \mu) S_r \left( S_r + \frac{1}{2} h l_2 \right) \\ m_3 &= \alpha \left( S_r + \frac{1}{2} h l_2 \right) - \\ &\quad \lambda \frac{\left( V_r + \frac{1}{2} h m_2 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right)}{N} - \\ &\quad (\omega + \mu) \left( V_r + \frac{1}{2} h m_2 \right) \\ n_3 &= \lambda \frac{\left( V_r + \frac{1}{2} h m_2 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right)}{N} + \\ &\quad \beta \frac{\left( S_r + \frac{1}{2} h l_2 \right) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right)}{N} - \\ &\quad (\gamma + \mu + \sigma) \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right) \\ i_3 &= \gamma \left( I_r + \frac{1}{2} h n_2 \right) + \omega \left( V_r + \frac{1}{2} h m_2 \right) - \\ &\quad \mu \left( R_r + \frac{1}{2} h i_2 \right) \\ k_4 &= \theta N - (\delta + \mu_1) (M_r + h k_3) \\ l_4 &= \delta (M_r + h k_3) - \\ &\quad \beta \frac{(S_r + h l_3) (I_r + h n_3)}{N} - \\ &\quad (\alpha + \mu) (S_r + h l_3) \\ m_4 &= \alpha (S_r + h l_3) - \\ &\quad \lambda \frac{(V_r + h m_3) (I_r + h n_3)}{N} - \\ &\quad (\omega + \mu) (V_r + h m_3) \\ n_4 &= \lambda \frac{(V_r + h m_3) (I_r + h n_3)}{N} + \\ &\quad \beta \frac{(S_r + h l_3) (I_r + h n_3)}{N} - \\ &\quad (\gamma + \mu + \sigma) (I_r + h n_3) \\ i_4 &= \gamma (I_r + h n_3) + \omega (V_r + h m_3) - \\ &\quad \mu (R_r + h i_3) \end{aligned}$$

Selanjutnya melakukan perhitungan numerik dengan mensubstitusikan nilai awal dan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Waktu interval atau jarak langkah yang digunakan adalah  $h = 0,01$ . Untuk iterasi pertama dengan  $r = 0$  menggunakan nilai awal

$M_r = M_{(0)}, S_r = S_{(0)}, V_r = V_{(0)}, I_r = I_{(0)}, R_r = R_{(0)}$ , dimana nilai dari setiap fungsi evaluasi yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned} k_1 &= 3615253,544 & k_3 &= 3612138,979 \\ l_1 &= -3515513,965 & l_3 &= -3512223,612 \\ m_1 &= 230538,287 & m_3 &= 229238,060 \\ n_1 &= -13,743 & n_3 &= -13,754 \\ i_1 &= 3242044,500 & i_3 &= 3243065,136 \\ k_2 &= 3612136,292 & k_4 &= 3609024,410 \\ l_2 &= -3512220,752 & l_4 &= -3508933,254 \\ m_2 &= 229231,744 & m_4 &= 227937,774 \\ n_2 &= -13,754 & n_4 &= -13,765 \\ i_2 &= 3243071,233 & i_4 &= 3244085,832 \end{aligned}$$

Setelah mendapatkan nilai tersebut, selanjutnya adalah mensubstitusikannya ke dalam persamaan (4.6) sampai (4.10) sehingga didapatkan solusi numerik model MSIR penyakit difteri adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} M_{0+1} &= M_0 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 4.367.228 + \frac{1}{6}(0,01) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3615253,544 + \\ &2(3612136,292) + \\ &2(3612138,979) + \\ &3609024,410) \\ &= 4.403.349 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{0+1} &= S_0 + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ &= 266.029.977 + \frac{1}{6}(0,01) \\ &(-3515513,965 \\ &+ 2(-3512220,752) + \\ &2(-3512223,612) - \\ &3508933,254) \\ &= 265.994.854 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{0+1} &= V_0 + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + \\ &m_4) \\ &= 3.482.100 + \\ &\frac{1}{6}(0,01)(230538,287 + \\ &2(229231,744) + \\ &2(229238,060) + 227937,774) \\ &= 3.484.392 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0+1} &= I_0 + \frac{1}{6}h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \\ &= 235 + \frac{1}{6}(0,01)(-13,743 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2(-13,754) + 2(-13,754) - \\ &13,765) \\ &= 234,8625 \end{aligned}$$

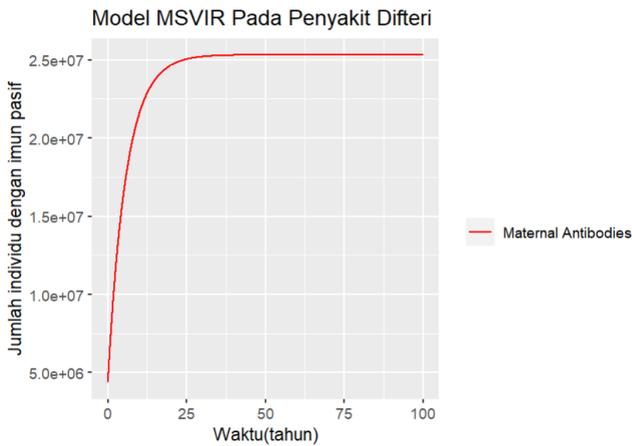
$$\begin{aligned} R_{0+1} &= R_0 + \frac{1}{6}h(i_1 + 2i_2 + 2i_3 + i_4) \\ &= 210 + \frac{1}{6}(0,01)(3242044,500 + \\ &2(3243071,233) + \\ &2(3243065,136) + \\ &3244085,832) \\ &= 32.640,67 \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan iterasi selanjutnya menggunakan program *R-Studio* dengan  $M_r, S_r, V_r, I_r, R_r$  dimana  $r = 1,2,3, \dots, dst$  sebagai nilai awal hingga iterasi ke-10000 atau akan memprediksi hingga  $t = 20$  tahun ke depan pada setiap kompartemen populasi. Hasil iterasi solusi numerik model MSVIR penyakit difteri tersebut untuk setiap kompartemen dapat dilihat pada Tabel 4.3

**Tabel 4. 3** Solusi Numerik Model MSVIR Penyakit Difteri Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4

| $t$    | $M$      | $S$       | $V$     | $I$        | $R$       |
|--------|----------|-----------|---------|------------|-----------|
| 0      | 4367228  | 266029977 | 3482100 | 235        | 210       |
| 0,01   | 4403349  | 265994855 | 3484392 | 234,8625   | 32640,67  |
| 0,02   | 4439409  | 265959798 | 3486659 | 234,7247   | 65091,64  |
| 0,03   | 4475406  | 265924807 | 3488900 | 234,5868   | 97562,65  |
| 0,04   | 4511341  | 265889882 | 3491115 | 234,4486   | 130053,48 |
| 0,05   | 4547214  | 265855022 | 3493305 | 234,3102   | 162563,89 |
| ⋮      | ⋮        | ⋮         | ⋮       | ⋮          | ⋮         |
| ⋮      | ⋮        | ⋮         | ⋮       | ⋮          | ⋮         |
| 99,95  | 25331295 | 260435839 | 3649514 | 0,01630043 | 289968109 |
| 99,96  | 25331295 | 260436519 | 3649524 | 0,01628768 | 289993793 |
| 99,97  | 25331295 | 260437199 | 3649533 | 0,01627493 | 290019476 |
| 99,98  | 25331295 | 260437879 | 3649543 | 0,01626220 | 290045158 |
| 99,99  | 25331295 | 260438559 | 3649553 | 0,01624947 | 290070840 |
| 100,00 | 25331295 | 260439238 | 3649563 | 0,01623676 | 290096521 |

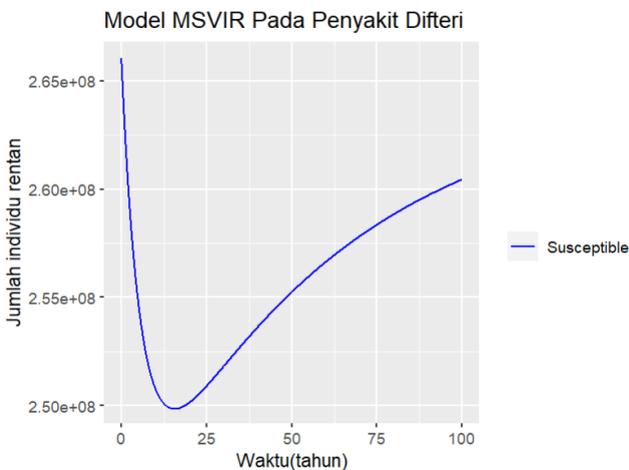
Hasil iterasi solusi numerik model penyebaran penyakit difteri menggunakan metode Runge-Kutta orde empat hingga  $t = 100$  tahun untuk laju setiap kelas akan ditunjukkan ke dalam plot grafik. Hasil iterasi untuk laju populasi kompartemen *Maternal Antibodies (M)* akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 4.2.



**Gambar 4. 2** Penyebaran Populasi *Maternal Antibodies* Pada Penyakit Difteri

Pada Gambar 4.2 terlihat bahwa pada awalnya nilai untuk populasi *Maternal Antibodies* sebesar 4.367.228 jiwa, namun beberapa waktu ke depan populasi *Maternal Antibodies* terlihat meningkat dan menjadi konstan. Hal ini karena jumlah populasi yang lahir setiap tahunnya meningkat dan masuk ke kompartemen *Maternal Antibodies*.

Selanjutnya hasil iterasi untuk laju populasi kompartemen *Susceptible (S)* akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 4.3.

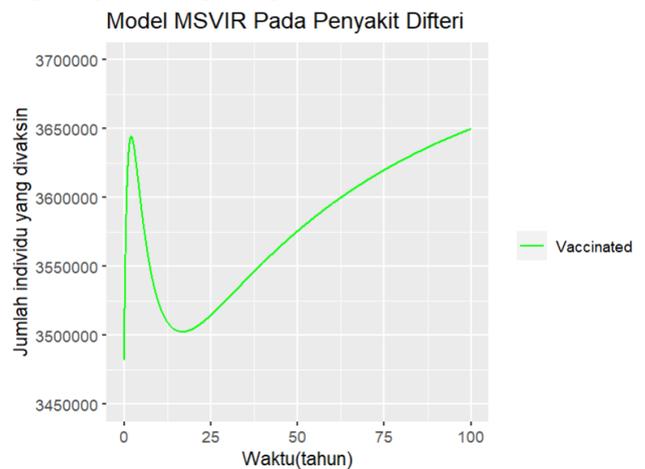


**Gambar 4. 3** Penyebaran Populasi *Susceptible* Pada Penyakit Difteri

Berdasarkan Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa pada awalnya populasi *Susceptible* mengalami kenaikan karena adanya aliran masuk berupa laju berakhirnya masa efektivitas imun pasif. Namun pada waktu selanjutnya terjadi penurunan yang cukup signifikan karena jumlah populasi yang keluar dari kompartemen *Susceptible* cukup besar. Hal ini terjadi karena adanya program vaksinasi pada populasi sehingga individu yang

divaksin berpindah ke kompartemen *Vaccinated*. Selain itu, terdapat juga individu yang mengalami kontak infeksi sehingga menjadi kelompok terinfeksi. Terdapat juga kemungkinan individu populasi mengalami kematian alami.

Selanjutnya hasil iterasi untuk laju populasi kompartemen *Vaccinated (V)* akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 4.4.



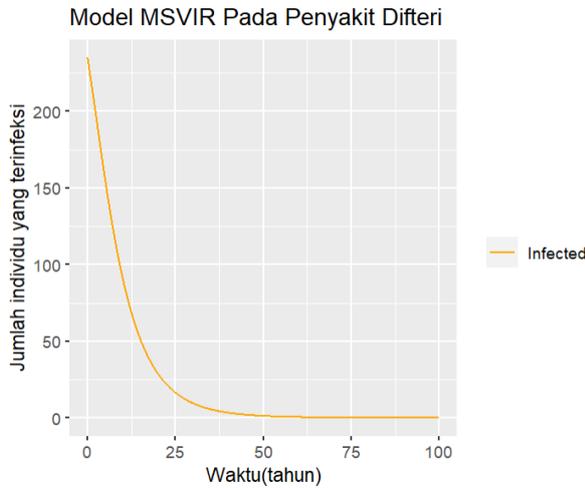
**Gambar 4. 4** Penyebaran Populasi *Vaccinated* Pada Penyakit Difteri

Pada Gambar 4.4 terlihat bahwa pada awalnya populasi *Vaccinated* mengalami peningkatan dikarenakan adanya aliran masuk berupa individu yang telah divaksin. Kemudian beberapa waktu setelahnya terjadi penurunan karena adanya aliran keluar dari kompartemen yang cukup signifikan. Hal itu terjadi karena adanya populasi yang melakukan kontak infeksi dan juga karena laju kegagalan vaksin sehingga populasi dapat berpindah menjadi kelompok terinfeksi. Adapun populasi *Vaccinated* yang dikategorikan berhasil memperoleh imunitas setelah divaksin juga mengalami perpindahan ke kompartemen *Recovered*.

Selanjutnya hasil iterasi untuk laju populasi kompartemen *Infected (I)* akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 4.5.

Berdasarkan Gambar 4.5, terlihat bahwa banyaknya individu yang terinfeksi mengalami penurunan terus-menerus untuk tahun berikutnya karena adanya aliran keluar dari kompartemen. Hal ini dikarenakan adanya keberhasilan vaksinasi yang membuat meningkatnya kekebalan individu yang telah divaksin terhadap difteri, adanya individu yang sembuh dari difteri karena pengobatan, dan adanya individu yang

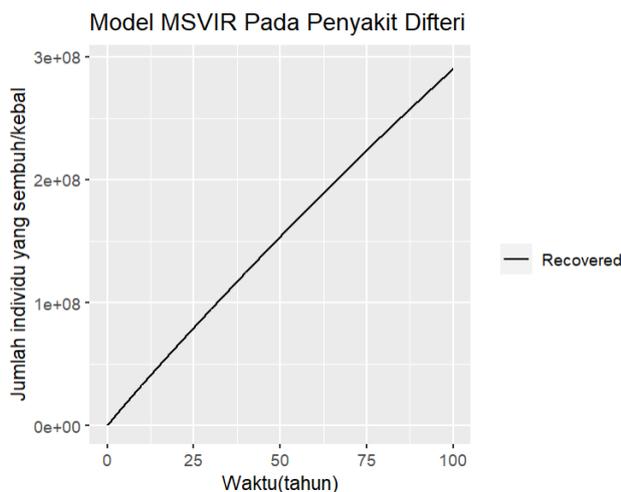
mengalami kematian karena difteri ataupun kematian alami.



Gambar 4. 5 Penyebaran Populasi *Infected* Pada Penyakit Difteri

Walaupun telah mengalami penurunan dari tahun sekarang diperoleh bahwa masih terdapat individu yang terinfeksi penyakit difteri untuk tahun-tahun berikutnya. Hal ini sejalan dengan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh [15] yang menggunakan model SVIR untuk memprediksi jumlah individu yang terkena penyakit difteri mendapatkan hasil bahwa pada tahun 2030 masih terdapat penyakit difteri di Indonesia

Selanjutnya hasil iterasi untuk laju populasi kompartemen *Infected* (*I*) akan ditunjukkan pada plot grafik seperti pada Gambar 4.6.



Gambar 4. 6 Penyebaran Populasi *Recovered* Pada Penyakit Difteri

Pada Gambar 4.6, dapat dilihat bahwa populasi kompartemen *Recovered* mengalami peningkatan setiap tahunnya. Hal ini dikarenakan

adanya kelompok individu terinfeksi yang telah sembuh setelah menjalani pengobatan berpindah ke kompartemen *Recovered*. Selain itu, juga adanya populasi yang mendapatkan imunitas setelah divaksin lalu masuk ke dalam kategori *Recovered*.

### 5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang diperoleh, maka kesimpulan yang didapat adalah sebagai berikut :

- 1) Model MSVIR pada penyakit difteri di Indonesia adalah :

$$\frac{dM}{dt} = \theta N - (\delta + \mu_1)M$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta M - \beta \frac{SI}{N} - (\alpha + \mu)S$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha S - \lambda \frac{VI}{N} - (\omega + \mu)V$$

$$\frac{dI}{dt} = \lambda \frac{VI}{N} + \beta \frac{SI}{N} - (\gamma + \mu + \sigma)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \omega V - \mu R$$

- 2) Hasil solusi numerik model MSVIR pada penyakit difteri menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan ukuran langkah  $h = 0,01$  diperoleh untuk iterasi ke-1 yaitu  $M(t_1) = 4403349$ ,  $S(t_1) = 265994855$ ,  $V(t_1) = 3484392$ ,  $I(t_1) = 234,8625$ , dan  $R(t_1) = 32640,67$ . Adapun hasil hingga iterasi ke-10000 diperoleh estimasi populasi *Maternal Antibodies* sebesar 25.331.295 jiwa, populasi *Susceptible* sebesar 260.438.559 jiwa, populasi *Vaccinated* sebesar 3.649.553 jiwa, populasi *Infected* sebesar 0 jiwa, dan populasi *Recovered* sebesar 290.096.521 jiwa.

### 6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Puspita, G., Kharis, M., & Supriyono. (2017). Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Karantina Dan Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 6(1), 26.
- [2] World Health Organization. (2017). Diphtheria vaccine: WHO position paper - August 2017. In *Weekly Epidemiology Record* (Vol. 92).
- [3] World Health Organization. (2021).

- Diphtheria Reported Cases and Incidence. Retrieved December 6, 2022, from World Health Organization website.
- [4] Kementerian Kesehatan RI. (2017). *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*. Jakarta: Direktorat Pencegahan dan Pengendalian Penyakit.
- [5] Suryani, I., & E, M. Y. (2016). Analisis Kestabilan Model MSEIR Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Saturated Incidence Rate. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, 2(1).
- [6] Malarvizhi, M., Karunanithi, S., & Gajalakshmi, N. (2020). Numerical Analysis Using RK-4 In Transient Analysis Of RLC Circuit. *Adv. Math. Sci. J*, 9, 6115-6124.
- [7] Ndi, M. Z. (2018). *Pemodelan matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: Deepublish Publisher.
- [8] Li, M. Y. (2018). An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases. In *An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases*. Edmonton: Springer.
- [9] Wulandari, U. N. (2013). *Analisis Model Epidemik MSEIR Pada Penyebaran Penyakit Difteri*. Universitas Jember.
- [10] Aryani, I., & Widyaningsih, P. (2020). Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) dan Penerapannya pada Penyakit Difteri di Indonesia. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 157.
- [11] Ndi, M. Z. (2018). *Pemodelan matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: Deepublish Publisher.
- [12] Maharani, S., & Suprpto, E. (2018). Analisis Numerik Berbasis Group Investigation Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis. In *The Modern Language Review* (Vol. 48). Magetan: CV. AE Media Grafika.
- [13] Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2007). *Metode Numerik Untuk Teknik Dengan Penerapan pada Komputer Pribadi* (S. Sardy, Ed.). Jakarta: Penerbit Universitas Indonesia (UI-Press).
- [14] Kementerian Kesehatan RI. (2017). *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*. Jakarta: Direktorat Pencegahan dan Pengendalian Penyakit.
- [15] Aryani, I., & Widyaningsih, P. (2020). Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) dan Penerapannya pada Penyakit Difteri di Indonesia. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 157.
- [16] Ndi, M. Z. (2018). *Pemodelan matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit*. Yogyakarta: Deepublish Publisher.
- [17] Widyaningsih, P., Jasaputra, A., Saputroc, D. R. S., & Pangadi, P. (2020). Simulasi Pengaruh Program Vaksinasi dalam Penyebaran Penyakit Difteri di Indonesia. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 172–178.
- [18] Kemenkes RI. (2022). Profil Kesehatan Indonesia 2021. In *Pusdatin.Kemendes.Go.Id*.
- [19] Sutanto, S., Ariskarini, W., & Widyaningsih, P. (2022). MODEL MATERNAL ANTIBODY SUSCEPTIBLE VACCINATED INFECTED RECOVERED (MSVIR) DENGAN PENGARUH SANITASI (KASUS DIFTERI DI INDONESIA). *AdMathEduSt: Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Matematika*, 9(1), 24. <https://doi.org/10.12928/admathedust.v9i1.21497>