APLIKASI TEOREMA BINOMIAL NEWTON PADA PERHITUNGAN BILANGAN PECAHAN RADIKAL

Sadli[i], Wahidah Alwi[ii], Try Azisah Nurman[iii]

[i] Mahasiswa Prodi Matematika UIN Alauddin
[ii] Dosen Prodi Matematika, UIN Alauddin
[iii] Dosen Prodi Matematika, UIN Alauddin

ABSTRAK, Pada artikel ini membahas tentang perhitungan bilangan pecahan radikal melalui penerapan teorema binomial.Teorema binomial merupakan teorema yang menjelaskan mengenai pengembangan eksponen dari penjumlahan antara dua variabel (binomial) berpangkat n. Untuk dapat menghitung nilai suatu bilangan pecahan radikal diperlukan deret binomial yang tidak lain merupakan perluasan dari teorema binomial. Deret binomial dapat digunakan untuk menghitung suatu bilangan pecahan radikal berbentuk$\sqrt[k]{1+x}$ dengan $|x| < 1$ dengan menggunakan sejumlah suku awal dari deret binomial dan menjumlahkan setiap suku-sukunya. Perhitungan nilai dari suatu bilangan pecahan radikal menggunakan penerapan deret binomial merupakan penaksiran terhadap nilai yang sebenarnya. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh hasil perhitungan bilangan pecahan radikal$\left(f(x) = \sqrt[k]{1+x}\right)$ atau $\left(f\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt[k]{1+\frac{a}{b}}\right)$ melalui penerapan teorema binomial newton berupa nilai hampiran $P_2\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\left(\frac{2}{\left({}^{a}/_{b}\right)} - 1\right)k + 1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{2} + 1,$ dimana$a, b, k \in Z,\ a < b,$ dana, b saling prima, serta nilai error $|R_2\left(\frac{a}{b}\right)| \leq \left|\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^3}\left(\frac{a}{b}\right)^3\right|.$

***Kata Kunci**:* Teorema Binomial Newton, Deret Binomial, Pecahan Radikal, Penarikan Akar

1. PENDAHULUAN

Perkembangan sains dan teknologi saat initelah dirasakan begitu pesat sehingga dapat menunjang berbagai pembangunan yang tidak terlepas dari perkembangan ilmu pasti dan ilmu alam khususnya ilmu matematika.Dalam ilmu matematika terdapat berbagai macam metode untuk menyelesaikan suatu permasalahan matematika, termasuk teorema untuk memudahkan suatu perhitungan matematika. Dalam suatu perhitungan yang rumit membutuhkan ketelitian dan akurasi yang cukup baik.

Pada awalnya Rumus Binomial Newton dikenal berguna untuk menjelaskan pengembangan aljabar pada perpangkatan suatu binomial. Pada perkembangannya, beberapa ahli matematika mulai menggunakan rumus tersebut pada teori bilangan. Dengan mengubah bilangan 2 digit (ab) ke bentuk binomial menjadi (10a + b), beberapa perhitungan bilangan 2 digit dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus binomial seperti menentukan sisa keterbagian dan hasil pemangkatan bilangan bulat 2 digit dengan pangkat bilangan bulat positif. Seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Munadi, dalam artikelnya yang berjudul “Aplikasi Rumus Binomial Newton Pada Pemangkatan Bilangan Bulat Dua Digit”, ia menunjukkan fakta bahwa angka-angka penyusun hasil pemangkatan (dengan pangkat bilangan asli) pada bilangan bulat dua digit mengikuti pola Rumus Binomial Newton, dimana Rumus Binomial Newton yaitu $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} K_k^n a^{n-k} b^k$, dengan a dan b variabel real yang tidak nol, dan n bilangan asli. Ia menerapkan pola tersebut pada contoh kasus $57^3 =$ $5^3 3.5^2.73.5.7^2 7^3$= $\underline{125525735343}$ = $\underline{185193}$ = 185193 dimana tanda garis bawah menunjukkan tempat digit hasil pemangkatan (Munadi, 2011:1).

Penulis tertarik menggunakan teori binomial dalam pemangkatan bilangan bulat tak negatif berpangkat pecahan (bilangan radikal) dengan bilangan yang dipangkatkan juga berbentuk pecahan, dengan kata lain menggunakan teori binomial untuk melakukan penarikan akar suatu bilangan pecahan. Mengingat metode-metode penarikan akar seperti metode coba-coba, pohon faktor, dan logaritma masing-masing memiliki kelebihan dan kekurangan tersendiri, seperti pada metode coba-coba yang hanya dapat menghitung nilai akar kuadrat dari bilangan kuadrat sempurna, akar pangkat tiga dari bilangan kubik sempurna dan seterusnya, begitu pula pada pohon faktor yang hanya menyederhanakan akar pangkat dari suatu bilangan real karena metode ini tidak dapat menghitung nilai dari bilangan yang bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna, kubik sempurna, dan seterusnya, misalnya $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$, sehingga dikatakan metode pohon faktor ini hanya menyederhanakan bentuk akar, bukan menghitung nilai akarnya. Selanjutnya pada metode logaritma, meskipun dapat menghitung nilai dari akar suatu bilangan yang bahkan bukan bilangan kuadrat sempurna atau sejenisnya, tetapi pada setiap perhitungan akan dibutuhkan tabel logaritma dan anti logaritma untuk nilai hasil akhirnya. Berdasarkan pertimbangan di atas, penulis ingin menjadikan rumus dari Issac Newton ini sebagai alternatif lain dalam metode penarikan akar dari suatu bilangan acak, dimana perhitungan yang dilakukan lebih sistematis tanpa harus melakukan metode coba-coba, tanpa harus menghapal deretan bilangan kuadrat sempurna, ataupun beberapa nilai dasar logaritma. Proses perhitungannya pun dapat dilakukan sepenuhnya dengan cara manual dari proses awal hingga hasil akhir tanpa menggunakan alat bantu berupa kalkulator ataupun tabel logaritma. Meskipun hasil yang didapatkan bukan merupakan nilai sebenarnya, tetapi memiliki nilai hampiran yang baik. Kemudian, penulis ingin memfokuskan penarikan akar pada bilangan pecahan acak yang berlaku untuk akar pangkat tiga, akar pangkat empat, dan seterusnya.

Berdasarkan latar belakang, penulis tertarik akan pengaplikasian sifat–sifat teorema binomial dalam memecahkan beberapa masalah yang terkait, dan akan mengkajinya lebih mendalam dengan mengangkat judul yaitu **“Aplikasi Teorema Binomial Newton pada Perhitungan Bilangan Pecahan Radikal”.**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana hasil perhitungan bilangan pecahan radikal melalui penerapan teorema binomial newton?

2. TINJAUAN PUSTAKA

SegitigaPascal

Segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Bentuk susunan segitiga ini muncul dalam tulisan Blaise Pascal yang berjudul *Traite du triangle arithmetique* (1653). Meski dikenal dengan nama Pascal, ternyata segitiga Pascal telah dipelajari beberapa abad sebelumnya seperti oleh Al-Karaji (953 – 1029), Omar Khayyam (1048 – 1131), Jia Xian (1010 – 1070) dan Yang Hui (1238 – 1290) (Untung, 2011:1).

Setiap baris segitiga pascal menyatakan koefisien untuk tiap nilai n pada $(a+b)^n$ secara berurut dimulai dari n = 0.Sebuah pengamatan berikut dibuat berdasarkan bentuk segitiga pascal:

1. Setiap angka yang tertulis merupakan hasil penjumlahan dari dua angka diagonal di atasnya (kecuali angka 1).
2. Setiap barisnya berbentuk simetris.
3. Jumlah angka di setiap barisnya adalah kelipatan 2 dari jumlah angka pada baris sebelumnya.
4. Di baris manapun, jumlah angka pada kolom ganjil sama dengan jumlah angka pada kolom genap (dalam satu baris yang sama)(Peter Brown, 2013:7).

Kombinasidan Notasi Faktorial

Suatu ekspansi binomial dapat dihitung menggunakan rumus kombinasi matematika dan notasi faktorial. Faktorial dari bilangan asli n adalah hasil perkalian antara bilangan bulat positif yang kurang dari atau sama dengan n. Faktorial ditulis sebagai n! dan disebut n factorial. Secara umum dapat dituliskan sebagai:

$$n! = n\,.\,(n-1).\,(n-2).\,\ldots.3.2.1$$

Istilah kombinasi dalam matematika kombinatorik berarti himpunan objek yang tidak mementingkan urutan. Kombinasi berbeda dengan permutasi yang mementingkan urutan objek. Kombinasi *r* dari sebuah himpunan S, berarti dari himpunan S diambil elemen sebanyak *r* untuk dijadikan sebuah himpunan baru. Banyaknya kombinasi r dari sebuah himpunan berisi *n* elemen dapat dihitung tanpa harus memperhatikan isi dari himpunan tersebut. Besarnya dinyatakan dengan fungsi

$$K_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Kombinasi dapat dibentuk dari dua kombinasi sebelumnya. Ini mengakibatkan banyaknya kombinasi juga bersifat rekursif. Bentuk ini juga sering disebut sebagai "Pascal's Identity" (Alexander Zawaria, 2009:240):

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r},$$

untuk 0 <*r*<*n*.

Teorema Binomial

Teori Binomial telah dikenal sejak jaman India Kuno dan Cina Kuno. Matematikawan Yunani abad ke-4 SM Euklides menyebutkan kasus khusus teorema binomial untuk eksponen 2, seperti yang dilakukan oleh matematikawan India abad ke-3 SM Pingala untuk tingkat yang lebih tinggi. Selanjutnya teori ini terus digunakan dan berkembang. Pada Tahun 1000 M, Al-Karaji seorang matematikawan Arab pertama kali memperkenalkan pembuktian dengan cara induksi yang digunakan untuk teori binomial. Beberapa nama ahli matematika lain juga tercatat telah membahas teori ini, pada abad ke-10 M oleh matematikawan India Halayuda, pada abad ke-11 oleh penyair dan matematikawan Persia Umar Khayyam, dan pada abad ke-13 oleh matematikawan Cina Yang Hui, yang semuanya telah menggunakan teori ini dan mendapatkan hasil yang sama. Selain beliau, ahli Matematika yang lain pada masanya Al-Haytham adalah orang pertama kali yang menjabarkan binomial pangkat empat. Pada Tahun 1665, Matematikawan dan Fisikawan Inggris Isaac Newton menemukan teori yang lengkap tentang binomial yang kemudian dipakai hingga sekarang. Beliau dihargai atas jasanya yang menjelaskan mengenai teorema binomial umum, yang berlaku untuk setiap eksponen. Itu sebabnya istilah binomial sering dikaitkan dengan nama beliau (Munadi, 2011:1).

Teorema binomial adalah teorema yang menjelaskan mengenai pengembangan eksponen dari penjumlahan antara dua variabel (binomial). Berdasarkan teorema ini, dimungkinkan untuk mengembangkan eksponen $(x+y)^n$ menjadi sebuah penjumlahan dari suku-suku dengan bentuk ax^by^c, dimana eksponen b dan c adalah bilangan bulat non negatif dengan $b+c=n$, dan koefisien a dari setiap suku adalah bilangan bulat positif tertentu tergantung pada n dan b.

Deret Binomial

Definisi 2.1 (deret binomial) jika$|x|<1$ dan n berlaku untuk semua bilangan real, maka

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

Dimana koefisien$\binom{n}{r}$ adalah koefisien binomial. Deret ini disebut deret binomial.

Rumus ini sanga tmirip dengan teorema binomial. Dalam hal ini, deret binomial memiliki sebuah penjumlahan tak terbatas. Dalam kasus teorema binomial (n adalah sebuah bilangan bulat positif), yang memiliki penjumlahan yang terbatas karena$\binom{n}{r} = 0$ kapan pun ketika $n<r$ (Philippe B. Laval, 376).

Bilangan Radikal

Konsep mengenai radikal pada umumnya dikenal sebagai bentuk akar pangkat dari suatu bilangan bulat positif. Notasi radikal ditemukan pada media cetak pertama kali pada tahun 1525 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman, Christoff Rudolf dalam bukunya berjudul Die Coss. Sedangkan konsep mengenai radikal dalam aljabar pertama kali dipelajari dalam ring pada awal abad ke-20 (Suryotodan

Djuwandi, 2012:1). Dalam bilangan bentuk akar (radikal), ada 3 bagian yang perlu diketahui, yaitu lambing bentuk akar, radikan, dan indeks. Secara umum, bentuk akar ditulis dalam bentuk:

$$\sqrt[n]{a}$$

($\sqrt[n]{a}$ dibaca "akar pangkat n dari a"). Dengan: $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar (radikal), $\sqrt{\ }$ disebut lambang bentuk akar, n disebut indeks (pangkat akar), a disebut radikan (bilangan di bawah tanda akar), dengan a bilangan riil positif untuk n bilangan asli dan untuk n bilangan ganjil, a dapat berupa bilangan riil negatif.

Jika n bilangan asli dengan $n > 1$ dan $a \in \mathbb{R}$, maka akar pangkat n bilangan a ditulis $\sqrt[n]{a}$ didefinisikan sebagai berikut (Hendi Senja Gumilar, 2008:24):

- $\sqrt[n]{a}$ adalah akar pangkat n yang positif dari a, dengan $a > 0$
- $\sqrt[n]{a}$ adalah akar pangkat n yang negatif dari a dengan $a < 0$ dan n ganjil
- $\sqrt[n]{0} = 0$.

3. METODOLOGI PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah berupa kajian pustaka, yaitu penelitian yang menggunakan metode pengumpulan informasi dalam bentuk pustaka, membaca dan mencatat serta bahan penelitian dengan memanfaatkan sumber kepustakaan untuk memperoleh informasi penelitian tanpa melakukan riset lapangan.

Adapun prosedur dalam penelitian untuk mendapatkan hasil perhitungan bilangan pecahan radikal melalui penerapan teorema binomial adalah sebagai berikut :

1) Mendefinisikan deret binomial beserta semua variabel yang digunakan dan merumuskan bentuk umum dari bilangan pecahan radikal. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:
   a. Dituliskan deret binomial $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}x^n + \cdots$, dimana $|x| < 1$ dan n berlaku untuk semua bilangan rasional,
   b. Memberikan syarat dan kondisi yang berlaku untuk setiap bilangan n bulat,
   c. Untuk setiap bilangan n pecahan, diberikan bilangan pecahan radikal $p^n = p^{\frac{j}{k}}$, dimana n, p bilangan pecahan lebih dari 0, dan $j, k \in$ Z, serta j, k saling prima,
   d. Memberikan pemisalan variabel yang baru agar $\sqrt[k]{p}$ dapat dijabarkan menjadi $h.\sqrt[k]{1+x}$ yang akan menjadi bentuk umum bilangan pecahan radikal,
   e. Merumuskan langkah-langkah secara umum penjabaran p^n menjadi $h.\sqrt[k]{1+x}$ disertai dengan contoh perhitungan langsung pada salah satu bilangan pecahan radikal.
2) Mendapatkan penyelesaian bentuk umum deret binomial dengan langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
   a. Menentukan banyaknya suku pertama yang akan digunakan untuk menghitung nilai hampiran dari $\sqrt[k]{1+x}$
   b. Dituliskan rumus deret binomial berdasarkan banyaknya suku pertama yang akan digunakan, $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$
   c. Mensubtitusikan nilai $n = \frac{1}{k}$,
   d. Pada $\sqrt[k]{1+x}$, dimisalkan $x = \frac{a}{b}$, dimana $a, b \in Z$dan saling prima, $\left|\frac{\mathrm{a}}{b}\right| < 1; |\mathrm{a}| < |b|$, dan disubtitusikan ke dalam deret binomial serta menyederhanakannya,
   e. Diperoleh solusi umum dari $\sqrt[k]{1+x}$.
3) Setelah diperoleh solusi umum dari $\sqrt[k]{1+x}$ maka ditentukan nilai errornya menggunakan teorema deret taylor dengan sisa, disertai dengan perhitungan langsung pada beberapa bilangan pecahan radikal sebagai solusi

khususnya. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Dihitung galat mutlak atau nilai error dari hasil perhitungan dengan memberikan pemisalan $f(x) = P_r(x) + R_r(x)$, dimana $f(x) = \sqrt[k]{1+x}$, $P_r(x)$ adalah polinom penjumlahan r suku pertama dari deret binomial, serta $R_r(x)$ adalah nilai errornya dengan $R_r(x) = \frac{f^{(r)}(c)}{r!}x^r$
b. Menentukan nilai k dan x, kemudian dihitung nilai $\sqrt[k]{1+x}$ menggunakan solusi umum yang telah didapatkan sebelumnya, disertai dengan nilai error yang diperoleh ketika nilai $f(x) = \sqrt[k]{1+x}$ ditaksir oleh $P_2(x)$
c. Mendapatkan data nilai $f(x)$ untuk setiap x yang telah ditentukan dengan menggunakan kalkulator dan ditampilkan dalam tabel.
d. Ditambahkan nilai $P_2(x)$ ke dalam tabel dan menghitung selisih $f(x)$ dan $P_2(x)$ untuk mendapatkan nilai $|R_2(x)|$
e. Diperoleh solusi khususnya berupa nilai $P_2(x) \approx f(x)$.

4. PEMBAHASAN

Mendefinisikan deret binomial beserta semua variabel yang digunakan dan merusumuskan bentuk umum dari bilangan pecahan radikal.

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Agar deret binomial dapat digunakan dalam perhitungan bilangan pecahan radikal, perlu didefinisikan terlebih dahulu setiap variabel yang digunakan pada deret binomial dan bilangan pecahan radikal. Adapun deret binomial yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}x^n + \cdots \qquad (4.1)$$

(4.1)

Dimana$|x| < 1$, n bilangan rasional.

Olehkarena$n$ bilangan rasional yang mana terbagi menjadi bilangan bulat dan bilangan pecahan, maka pertama akan ditunjukkan bahwa$n$ berlaku untuk bilangan bulat.

a. Pada kondisi dimana$n$ bilangan bulat, persamaan(4.1) penjumlahannya akan berhenti pada suku ke - $(n+1)$, dikarenakan pada suku ke - $(n+2)$ dan seterusnya bernilai 0. Berikut akan disubstitusikan untuk beberapa nilai bilangan bulat n:

$n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + (1)x + \frac{(1)(1-1)}{2!}x^2 + \frac{(1)(1-1)(1-2)}{3!}x^3 + \cdots$
$= 1 + 1x + 0 + 0 + \cdots$

$n = 2$: $(1+x)^2 = 1 + (2)x + \frac{(2)(2-1)}{2!}x^2 + \frac{(2)(2-1)(2-2)}{3!}x^3 + \cdots$
$= 1 + 2x + x^2 + 0 + \cdots$

$n = 3$: $(1+x)^3 = 1 + (3)x + \frac{(3)(3-1)}{2!}x^2 + \frac{(3)(3-1)(3-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(3)(3-1)(3-2)(3-3)}{4!}x^4 + \cdots$
$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 + 0 + \cdots$

$n = r$: $(1+x)^r = 1 + (r)x + \frac{(r)(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(r)(r-1)\ldots(r-(r+1))}{(r)!}x^{(r)} + \frac{(r)(r-1)\ldots(r-r)}{(r+1)!}x^{(r+1)} + \cdots$
$= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\ldots(r-(r+1))}{(r)!}x^{(r)} + 0 + \cdots$

Dengan demikian deret binomial berlaku untuk n bilangan bulat dan penjumlahannya akan selalu berhenti pada sukuke - $(n+1)$.

b. Pada nilai$n$berbentuk pecahan, dimisalkan $n = \frac{j}{k}$, dimana $j, k \in$ bulat dan saling prima, maka bilangan pecahan radikal yang dimaksud adalah:

$$p^{\frac{j}{k}} = \sqrt[k]{p^j} \qquad (4.2)$$

Dengan$p$ bilangan positif berbentuk pecahan. Dikarenakan pada kondisi dimana $j > 1$, diawal proses sebelum menggunakan rumus binomial dapat dilakukan pemangkatan terlebih dahulu terhadap p^j yang kemudian menghasilkan suatu bilangan pecahan p yang baru, sehingga perhitungan dapat difokuskan pada bentuk $n = \frac{1}{k}$, $j = 1$. Bilangan pecahan radikal selanjutnya akan dituliskan dalam bentuk :

$$p^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{p} \qquad (4.3)$$

Dengan$p \in$ pecahan, $p > 0$, $k \in$ Z.

c. Agar rumus deret binomial dapat diaplikasikan dalam perhitungan suatu bilangan berbentuk $\sqrt[k]{p}$, maka dimisalkan $p = h^k.y$, dan $y = 1 + x$, dimana $h \in$ bulat, $y \in$ pecahan, y > 0, serta $|x| < 1$. Sehingga bilangan pecahan radikal dapat pula dituliskan dalam bentuk:

$$\sqrt[k]{p} = h.\sqrt[k]{y} \qquad (4.4)$$

$$\sqrt[k]{p} = h.\sqrt[k]{(1+x)} \qquad (4.5)$$

Dengan: p bilangan pecahan, $p > 0$;
h bilangan bulat, $h > 0$;
$k$bilangan bulat $k > 0$;
$y$bilangan pecahan, $0 < y < 2$;
$x$bilangan pecahan,$|x| < 1$.

d. Adapun langkah-langkah secara umum yang dilakukan agar suatu bilangan acak p dengan pangkat $\frac{1}{k}$ dapat dihitung menggunakan deret binomial yaitu:

1) Menentukan bilangan acak $\sqrt[k]{p}$ yang akan dihitung nilainya. Misalkan:

$$\sqrt[k]{p} = \sqrt[3]{\frac{22}{7}}$$

2) Menentukan nilai h sehingga nilai y memenuhi syarat $0 < y < 2$:

$$\sqrt[3]{\frac{22}{7}} = \sqrt[3]{8.\frac{1}{8}.\frac{22}{7}} = 2.\sqrt[3]{\frac{11}{28}}$$

3) Mengubah nilai $\sqrt[k]{y}$ menjadi suatu penjumlahan berbentuk $\sqrt[k]{1+x}$:

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{\frac{11}{28}}$$

$$= \sqrt[3]{1 + \left(-\frac{17}{28}\right)}$$

4) Menghitung nilai$\sqrt[k]{1+x}$ dengan menggunakan rumus dari deret binomial yang akan dirumuskan bentuk umumnya pada tahap selanjutnya.

Mendapatkan penyelesaian bentuk umum deret binomial dengan langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Pada penelitian ini, akan digunakan 3 suku pertama dari deret binomial untuk menghitung nilai hampiran dari $f(x)$ yang diperoleh dari persamaan berikut:

$$f(x) = \sqrt[k]{1+x} \quad (4.6)$$

Polinom 3 suku pertama dari deret binomial selanjutnya dituliskan dengan $P_2(x)$ dikarenakan derajat x pada suku ke-3 adalah 2. Nilai $f(x)$ dihampiri oleh $P_2(x)$ dituliskan dalam persamaan berikut:

$$f(x) \approx P_2(x) \qquad (4.7)$$

a)Berikut ini adalah bentuk umum dari 3 suku pertama dari deret binomial pada persamaan (4.1):

$$P_2(x) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 (4.8)$$

b) Disubstitusikan nilai $n = \frac{1}{k}$, maka

$$P_2(x) = 1 + \left(\frac{1}{k}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{k} - 1\right)x^2$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{k} + \frac{(1-k)}{2k^2}x^2 \qquad (4.9)$$

c) Misalkan $x = \frac{a}{b}$, dimana $a, b \in$ bulat dan saling prima, $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$;$|a| < |b|$, maka:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \sqrt[k]{1 + \frac{a}{b}},$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{a}{bk} + \frac{(1-k)}{2k^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{a}{bk} + \frac{(1-k)a^2}{2k^2b^2}$$

$$= 1 + \frac{2abk + (1-k)a^2}{2b^2k^2}$$

$$= 1 + \frac{a}{2b^2k^2}(2bk + (1-k)a)$$

$$= 1 + \frac{a}{2b^2k^2}(2bk + a - ak)$$

$$= 1 + \frac{a}{2b^2k^2}(a + (2b-a)k)$$

$$= 1 + \frac{1}{2a}\frac{a^2}{b^2k^2}(a + (2b - a)k)$$

$$= 1 + \frac{1}{2a}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2 (a + (2b - a)k)$$

$$= 1 + \frac{1}{2a}(a + (2b - a)k)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + (2\left(\frac{b}{a}\right) - 1)k\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{\left({}^{a}/_{b}\right)} - 1\right)k\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2$$

$$P_2(x) = \left(\left(\frac{2}{\left({}^{a}/_{b}\right)} - 1\right)k + 1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{2} + 1$$

$$\sqrt[k]{1 + \frac{a}{b}} \approx \left(\left(\frac{2}{\left({}^{a}/_{b}\right)} - 1\right)k + 1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{2} + 1 \qquad (4.10)$$

Persamaan (4.10) digunakan untuk memudahkan perhitungan jika hasil yang diinginkan berbentuk pecahan. Dari rumus di atas diperoleh sebuah ilustrasi perhitungan sebagai berikut:

Langkah 1: 2 dibagi dengan $\left(\frac{a}{b}\right)$, kemudian dikurangi 1

Langkah 2: hasil yang didapat dikalikan dengan k, kemudian dijumlahkan 1

Langkah 3: selanjutnya dikalikan dengan masing-masing kuadrat dari $\frac{a}{b}$dan $\frac{1}{k}$;

Langkah 4: terakhir dibagi dengan 2 kemudian dijumlahkan 1.

Jika pola di atas digunakan, maka hal ini akan menjadi salah satu metode alternative penarikan akar dengan hasil yang diperoleh berbentuk pecahan.

Menghitung nilai error menggunakan teorema deret taylor dengan sisa, disertai dengan perhitungan langsung pada beberapa bilangan pecahan radikal sebagai solusi khususnya.

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Untuk menghitung galat mutlak atau nilai error mutlak, dilakukan penjabaran deret binomial seperti berikut:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{r!}x^r + \cdots$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x - a)^r + R_r(x)$$

$$f(x) = P_r(x) + R_r(x), \qquad (4.11)$$

Dimana$f(x)$ adalah nilai sejati dari $(1 + x)^n$, dan $P_r(x)$ disebut polinom berderajat r dimana nilai dari $P_r(x)$ adalah nilai hampiran untuk $f(x)$.

Berdasarkanpersamaan (4.7) dan (4.11), ketikanilai$f(x)$ ditaksir dengan nilai $P_r(x)$, maka nilai errornya yaitu:

$$f(x) \approx P_r(x)$$

$$|f(x) - P_r(x)| = |R_r(x)| \qquad (4.12)$$

Dimana$|R_r(x)|$ menyatakan galat mutlak atau error mutlak ketika $f(x)$ ditaksir dengan $P_r(x)$. Berdasarkanteoremaderettaylorsisa, nilai$R_r(x)$ adalah sama dengan nilai pada ekspresi berikut:

$$R_r(x) = \frac{f^{r+1}(c)}{(r+1)!}(x - a)^{r+1} \qquad (4.13)$$

Untuk suatu c diantara $a$dan x, $a < c < x$. Pada kasus deret binomial yang digunakanpadaartikelini, nilai $a = 0$, dan $|x| < 1$, sehingga $0 < c < 1$. $f^{(r)}(x)$ adalah turunan ke- r dari $f(x)$, rumus dari $f^{(r)}(x)$ adalah sebagai berikut:

$$f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(1+x)^{n-r}$$

Untuk $n = \frac{1}{k}$,

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{k} - 2\right) \dots (\frac{1}{k} - r + 1)(1 + x)^{\frac{1}{k} - r}$$

$$f^{(r)}(x) = \frac{(1)(1-k)(1-2k)\dots(1-(r-1)k)}{k^r}(1 + x)^{\frac{1-rk}{k}} \qquad (4.14.)$$

Persamaan (4.6) dan (4.8) disubstitusikanke (4.7) :

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

atau,

$$(1 + x)^{1/k} \approx 1 + \frac{x}{k} + \frac{(1-k)}{2k^2}x^2$$

Persamaan (4.13) dan (4.14) disubstitusikan ke (4.12) dimana $P_2(x)$ digunakan untuk menaksir nilai $f(x)$dengan nilai error $R_2(x)$, sehingga diperoleh:

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)|$$

$$|f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{f^3(c)}{(3)!}(x)^3\right|$$

$$= \left|\frac{(1-k)(1-2k)}{(3)!\,k^3}(1+c)^{\frac{1-2k}{k}}(x)^3\right|$$

$$= \left|\frac{(1-k)(1-2k)x^3}{6k^3}\frac{1}{(1+c)^{\frac{2k-1}{k}}}\right|$$

Karena $0 < c < 1, (1 + c)^{\frac{2k-1}{k}} \geq 1, \frac{1}{(1+c)^{\frac{2k-1}{k}}} \leq \frac{1}{1}$ maka:

$$|R_2(x)| = \left|\frac{(1-k)(1-2k)x^3}{6k^3}\right|\left|\frac{1}{(1+c)^{\frac{2k-1}{k}}}\right|$$

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{(1-k)(1-2k)x^3}{6k^3}\right|$$

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{6k^3}\right| \qquad (4.15)$$

b. Selanjutnya akan dihitung nilai $P_2(x)$, dengan nilai $k = 2$ untuk masing-masing nilai $x = 0{,}1$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}3$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}5$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}7$, $x = 0{,}8$, $x = 0{,}9$ atau dapat dituliskan dengan notasi $x = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$. Ketika $k = 2$, nilai $|R_2(x)|$ dari pertidaksamaan (4.15) dapat disederhanakan seperti berikut:

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{6k^3}\right|$$

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{x^3}{2^4}\right| \qquad (4.16)$$

Dengan nilai $k = 2$, nilai error mutlak $|R_2(x)|$ tidak akan lebih dari $\left|\frac{x^3}{2^4}\right|$. Selanjutnya akan dihitung nilai $P_2(x)$ untuk masing-masing nilai x yang telah ditentukan.

Untuk memudahkan perhitungan, terlebih dahulu disubstitusikan nilai $k = 2$ ke persamaan (4.10), yaitu:

$$\sqrt[k]{1 + \frac{a}{b}} \approx \left(\left(\frac{2}{\left(a/_b\right)} - 1\right)k + 1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{2} + 1$$

$$\sqrt{1+\frac{a}{b}} \approx \left(\left(\left(\frac{2}{\left({}^{a}/_{b}\right)}-1\right)2+1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+1\right.$$

$$= \left(\frac{4}{\left({}^{a}/_{b}\right)}-2+1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+1$$

$$P_2\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{\left({}^{a}/_{b}\right)}-1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2+1$$

c. Berikut ini adalah data dari $f(x)$, dengan $x = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$, yang dihitung menggunakan program matlab:

Tabel 4.1 Tabel Data Nilai Sejati Bilangan Pecahan Radikal ($f(x)$)

x	y	$f(x)$
0,1	1,1	1,04880885
0,2	1,2	1,09544512
0,3	1,3	1,14017542
0,4	1,4	1,18321596
0,5	1,5	1,22474487
0,6	1,6	1,26491106
0,7	1,7	1,30384048
0,8	1,8	1,34164079
0,9	1,9	1,37840488

Untuk setiap nilai $x = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$ diperoleh nilai y dan $f(x)$ berdasarkan rumus $y = 1 + x$, dan $f(x) = \sqrt{y}$ yang dihitung menggunakan program matlab dengan tingkat ketelitian sampai 8 angka desimal. Nilai f(x) merupakan nilai sejati atau nilai yang sebenarnya yang akan menjadi perbandingan terhadap nilai P_2(x) yang akan ditampilkan pada tabel selanjutnya.

d. Table berikut menunjukkan nilai $|R_2(x)|$ berdasarkan selisih mutlak dari $f(x)$ dan $P_2(x)$:

Tabel 4.2Tabel Data Nilai Sejati Bilangan Pecahan Radikal $f(x)$, Nilai Hampiran $P_2(x)$, dan Nilai Error Mutlak $|R_2(x)|$

x	y	$f(x)$	$P_2(x)$	$\lvert R_2(x)\rvert$
0,1	1,1	1,04880885	1,04875	0,00005885
0,2	1,2	1,09544512	1,095	0,00044512
0,3	1,3	1,14017542	1,13875	0,00142542
0,4	1,4	1,18321596	1,18	0,00321596
0,5	1,5	1,22474487	1,21875	0,00599487
0,6	1,6	1,26491106	1,255	0,00991106
0,7	1,7	1,30384048	1,28875	0,01509048
0,8	1,8	1,34164079	1,32	0,02164079
0,9	1,9	1,37840488	1,34875	0,02605488

Nilai$P_2(x)$ yang diperoleh dari perhitungan sebelumnya merupakan nilai hampiran terhadap nilai $f(x)$. Nilai error mutlak $|R_2(x)|$ yang ditampilkan pada tabel di atas diperoleh dari rumus $|R_2(x)| = |f(x) - P_2(x)|$. Nilai error mutlak $|R_2(x)|$ juga dapat dihitung dengan menggunakan pertidaksamaan (4.16) yaitu:

$$|R_2(x)| \leq \left|\frac{x^3}{2^4}\right|$$

Denganmensubstitusikannilai$x = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$, diperoleh:

- $|R_2(0{,}1)| \leq \left|\frac{0{,}1^3}{2^4}\right| = 0{,}0000625$
- $|R_2(0{,}2)| \leq \left|\frac{0{,}2^3}{2^4}\right| = 0{,}0005$
- $|R_2(0{,}3)| \leq \left|\frac{0{,}3^3}{2^4}\right| = 0{,}001875$
- $|R_2(0{,}4)| \leq \left|\frac{0{,}4^3}{2^4}\right| = 0{,}004$
- $|R_2(0{,}5)| \leq \left|\frac{0{,}5^3}{2^4}\right| = 0{,}0078125$
- $|R_2(0{,}6)| \leq \left|\frac{0{,}6^3}{2^4}\right| = 0{,}0135$
- $|R_2(0{,}7)| \leq \left|\frac{0{,}7^3}{2^4}\right| = 0{,}0214375$
- $|R_2(0{,}8)| \leq \left|\frac{0{,}8^3}{2^4}\right| = 0{,}032$
- $|R_2(0{,}9)| \leq \left|\frac{0{,}9^3}{2^4}\right| = 0{,}0455625$

Dari tabel 4.2 menunjukkan bahwa nilai$|R_2(x)| = |f(x) - P_2(x)|$ dari setiap nilai $x = \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\}$ memenuhi pertidaksamaan $|R_2(x)| \leq \left|\frac{x^3}{2^4}\right|$.

Tiga tahapan dalam proses perhitungan bilangan akar radikal. Pada *tahap pertama*, penulis menentukan bentuk umum bilangan pecahan radikal yang bertujuan untuk mempermudah suatu bilangan pecahan radikal untuk dikonversi kedalam bentuk perkalian antara $\sqrt[k]{1+x}$ dengan suatu bilangan bulat. Adapun tujuan dilakukannya konversi tersebut dikarenakan pada tahapan selanjutnya, bilangan yang akan diproses adalah bilangan berbentuk $\sqrt[k]{1+x}$.

Pada tahap kedua, penulis menentukan bentuk umum dari $P_r(x)$ sebagai nilai hampiran dari $\sqrt[k]{1+x}$, dimana $P_r(x)$ adalah deret binomial yang penjumlahannya dipotong pada suku ke-$(r+1)$. Adapun pada tahap ini, penulis mengambil 3 suku pertama dari deret binomial yaitu $1+\frac{x}{k}+\frac{(1-k)}{2k^2}x^2$. Deretinilah yang akan disederhanakan untuk mendapatkan bentuk umum dari $P_2(x)$ sebagai nilai taksiran untuk $f(x)=\sqrt[k]{1+x}$. Bentuk umum yang diperoleh dapat digunakan dalam melakukan penarikan akar dengan k berlaku untuk semua bilangan real.seperti halnya penarikan akar yang menggunaka nmetode coba-coba, pohon faktor, dan logaritma, metode penarikan akar yang menggunakan bentuk umum $P_2(x)$ sewaktu-waktu dapat digunakan untuk menghitung cepat nilai dari suatu akar tanpa bantuan alat hitung seperti kalkulator yang tentunya juga memiliki nilai error $R_2(x)$.

Pada tahap ketiga, diperoleh sebuah nilai error $R_2(x)$ ketika nilai $f(x)$ ditaksir oleh $P_2(x)$. Dihitung terlebih dahulu nilai error $R_2(x)$ secara umum untuk suatu k bilangan bulat dan $|x|<1$. Diperoleh sebuah ekspresi $|R_2(x)| \leq \left|\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{6k^3}\right|$, dengan demikian nilai error $R_2(x)$ tidak akan melebihi nilai dari ekspresi $\left|\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{6k^3}\right|$ atau maksimal nilai error yang akan diperoleh adalah $\left|\frac{(k-1)(2k-1)x^3}{6k^3}\right|$. Terlihat bahwa $|R_2(x)|$ berbanding lurus dengan $|x|$, yang berarti bahwa semakin besar nilai $|x|$ semakin besar pula nilai error $|R_2(x)|$. Untuk menunjukkan hal tersebut, akan dihitung nilai $P_2(x)$ dan $|f(x)-P_2(x)|=|R_2(x)|$. Dikarenakan syarat $|x|<1$, penulis mengambil sampel untuk $x=\{0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5, 0{,}6, 0{,}7, 0{,}8, 0{,}9\}$dan $k=2$. Sehingga diperoleh hasil seperti pada tabel 4.2 yaitu nilai $|R_2(x)|$ yang terkecil diperoleh di $|R_2(0{,}1)|$ dan nilai $|R_2(x)|$ yang terbesar diperoleh di $|R_2(0{,}9)|$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh hasil perhitungan bilangan pecahan radikal$\left(f(x)=\sqrt[k]{1+x}\right)$ atau $\left(f\left(\frac{a}{b}\right)=\sqrt[k]{1+\frac{a}{b}}\right)$ melalui penerapan teorema binomial newton berupa nilai hampiran $P_2\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\left(\frac{2}{(^a/_b)}-1\right)k+1\right)\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{1}{k}\right)^2\frac{1}{2}+1$, dimana$a,b,k\in Z$, $a<b$, dana,b saling prima, serta nilai error $|R_2\left(\frac{a}{b}\right)| \leq \left|\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^3}\left(\frac{a}{b}\right)^3\right|$

DAFTAR PUSTAKA

A. Barnet, Raymond, dkk. *College Algebra* (Higher Education, 2005).

Tiro, Muhammad Arif, dkk. *Pengenalan Teori Bilangan* (Andira Publisher Makassar).

B. Laval Philippe.*The Binomial Series*.

Brown, Peter, dkk.*The Binomial Theorem* (Australia: Education Services Australia, 2013).

Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan terjemahannya* (Jakarta: Yayasan Penyelenggara Penterjemah/Pentafsir Al-Qur'an, 2005).

Munadi.*AplikasiRumus Binomial Newton Pada Pemangkatan Bilangan Bulat Dua Digit*(Tegal: Universitas Pancasakti, 2011).

Senja Gumilar, Hendi. *Matematika Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan Kelas 10*(Pusat Perbukuan Diknas, 2008).

Sharma, dkk.*History of Development of Binomial Expansion* (Ganita Bharati, Vol 26).

Suryoto dan Djuwandi.*TeoriRadikaldalam BCH Aljabar* (Semarang: Universitas Diponegoro, 2012).

Untung.*Perluasan Segitiga Pascal*(Yogyakarta: PPPPTK Matematika, 2011).

Wikipedia.*Kombinasi*(id.wikipedia.org).

Wikipedia. *Teorema Binomial* (id.wikipedia.org).

Zawaria, Alexander, dkk.*a prime for mathematic competitions*(United States, New York: Oxford University Press, 2009).