TRANSFORMASI FOURIER DAN TRANSFORMASI FOURIER QUATERNION

Muh. Irwan[i]

Muhammad Ridwan[ii]

[i] *Prodi Matematika, UIN Alauddin, muhirwan@uin-alauddin.ac.id*
[ii] *Prodi Matematika, UIN Alauddin, muhammadridwan@uin-alauddin.ac.id*

ABSTRAK, pada paper ini menjelaskan transformasi Fourier baik yang bernilai real maupun yang bernilai quaternion. Perbedaan mendasarnya terletak pada kernel transformasi, dimana pada transformasi Fourier quaternion dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu sisi kiri, sisi kanan dan dua sisi. Adapun sifat-sifat yang dibuktikan seperti pergeseran, modulasi, pengskalaan dan lain-lain (TFQ sisi kanan).

***Kata Kunci**: Transformasi Fourier, Transformasi Fourier Quaternion*

1. PENDAHULUAN

Salah satu perluasan dari bilangan quaternion adalah transformasi Fourier quaternion (TFQ). Transformasi Fourier quaternion memiliki peranan penting dalam berbagai bidang ilmu. Diantaranya, pada bidang komputer grafik, komputer vision, kompressi data, pemrosesan gambar, fisika dan analisis pewarnaan gambar [1],[2],[6],[7]. Berdasarkan letak kernelnya, TFQ dibedakan menjadi tiga tipe, yaitu tipe I TFQ (dua sisi), tipe II TFQ (sisi kiri) dan tipe III TFQ (sisi kanan). Adanya tiga tipe TFQ disebabkan karena sifat yang nonkomutatif terhadap operasi perkalian yang merupakan sifat dasar dari bilangan quaternion.

Beberapa penelitian telah dilakukan terhadap TFQ diantaranya, Implementasi TFQ dari konvolusi dan Korelasi pada kompleks 2-D FFT [7], prinsip ketidakpastian untuk TFQ sisi kanan [3], prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk TFQ dua sisi [8], transformasi kanonikal linear quaternion satu sisi [6], transformasi Fourier quaternion pada lapangan quaternion dan perluasannya [4], dan Teorema korelasi untuk TFQ tipe dua [2].

Pada penelitian ini, akan diperkenalkan transformasi Fourier quaternion dua sisi dengan beberapa teorema yang berkaitan dengan sifat-sifatnya.

2. TINJAUANPUSTAKA

Bilangan Quaternion

Himpunan bilangan quaternion dituliskan dengan simbol $\mathbb{H}$ sebagai penghargaan bagi Sir William Roman Hamilton, dimana elemen-elemen dari bilangan quaternion merupakan kombinasi linear dari bilangan skalar riil dan tiga bagian imajiner $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$ yang dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 | q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Jika q_2 dan q_3 bernilai nol maka persamaan (2.4) merupakan suatu bilangan kompleks. Sedangkan jika $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$, maka persamaan (2.4) merupakan elemen identitas penjumlahan quaternion. Jika $q_0 = 1, q_1 = q_2 = q_3 = 0$ maka persamaan (2.4) disebut elemen identitas perkalian quaternion (J.P. Morais, dkk. 2012). Selanjutnya, persamaan (2.4) dapat dituliskan menjadi

$$q = Sc(q) + \boldsymbol{q}$$

Dalam hal ini $Sc(q) = q_0$ adalah bagian skalar dari q, dan $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ sebagai bagian vektor (*vector part*) dari q. Perkalian elemen-elemen dari suatu bilangan quaternion berdasarkan aturan Hamilton dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$
$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}.$$

Dapat diperhatikan bahwa operasi penjumlahan dan pengurangan quaternion dilakukan seperti pada operasi penjumlahan dan pengurangan suku banyak. Jika $p, q \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ dan $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ maka

$$p + q = (p_0 + q_0) + \boldsymbol{i}(p_1 + q_1) + \boldsymbol{j}(p_2 + q_2) + \boldsymbol{k}(p_3 + q_3).$$

Dengan cara yang sama, operasi pengurangan pada bilangan quaternion

$$p - q = (p_0 - q_0) + \boldsymbol{i}(p_1 - q_1) + \boldsymbol{j}(p_2 - q_2) + \boldsymbol{k}(p_3 - q_3).$$

Selanjutnya, operasi perkalian p dan q dilakukan berdasarkan perkalian polinom yaitu

$$pq = p_0q_0 - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} + p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q},$$

dimana $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)$ adalah hasil kali titik (dot product) dan $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \boldsymbol{j}(p_1q_3 - p_3q_1) + \boldsymbol{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$.

Hasil perkalian pq dengan qp tidak selalu sama, ini karena perkalian silang dari $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ tidak komutatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa $pq = qp$ jika dan hanya jika $p_0 = q_0$ dan $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$.

Definisi 2.2. Untuk sebarang $p \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, konjugasi dari p adalah

$$\begin{aligned}\overline{p} &= \overline{p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3} \\ &= p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3.\end{aligned}$$

Dan modulo p dituliskan dengan |p| dan didefinisikan sebagai

$$|p| = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

Ruang $\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R})$ dan $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{R})$

Sebelum mendefinisikan transformasi Fourier dan membuktikan beberapa sifat-sifatnya, terlebih dahulu akan dibahas tentang fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}$. Misalkan f terintegralkan pada $\mathbb{R}$, maka ruang $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ sebagai semua ruang fungsi f yang terintegralkan mutlak pada $\mathbb{R}$, yaitu

$$L^1 = \left\{f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| < \infty\right\}.$$

Ruang L^1 dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_1$ yang dirumuskan [4],

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Selanjutnya, didefinisikan juga untuk ruang $L^2(\mathbb{R})$ sebagai ruang fungsi f yang kuadratnya terintegralkan [4],,

$$L^2 = \left\{f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 < \infty\right\}.$$

Ruang L^2 dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_2$ yang dirumuskan [4],

$$\|f\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}.$$

Perlu diperhatikan bahwa tidak semua $f \in L^1$ juga $f \in L^2$.

3. PROSEDUR PENELITIAN

Penulisan paper ini digunakan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Mendefinisikan transformasi Fourier
b. Menguraikan sifat-sifat transformasi Fourier
c. Mendefinisikan transformasi Fourier quaternion
d. Menguraikan sifat-sifat transformasi Fourier quaternion

4. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang transformasi Fourier dan transformasi Fourier quaternion.

Transformasi Fourier

Definisi.

Misalkan $f \in L^1$, yakni $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < \infty$. Transformasi Fourier dari f, dituliskan dengan $\mathcal{F}$ dan didefinisikan oleh [4],

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}.$$

Sedangkan invers transformasi Fourier didefinisikan dengan

$$\mathcal{F}^{-1}(\omega) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega,\ x \in \mathbb{R}$$

Teorema

Misalkan $f \in L^1$, dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f = f(-x)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{-i\omega x}dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{-i(-\omega)(-x)}dx,\\ &= \mathcal{F}\{f\}(-\omega)\end{aligned}$$

Dimana $f(-x)$ disebut sebagai *time reversal* dan $\mathcal{F}\{f\}(-\omega)$ *frequency reversal.*

Teorema

Misalkan $f \in L^1$, dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f = f(x - a)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}(\omega)e^{-i\omega a}$.

Bukti:

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier (3.1),

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-i\omega x}dx,$$

Misalkan $x - a = t$, sehingga $x = t + a$ dan $dx = dt$,

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega(a+t)}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dx\, e^{-i\omega a}$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega)e^{-i\omega a}$$

Dengan demikian teorema terbukti. Teorema ini disebut sebagai teorema pergeseran atau translasi dimana x digeser sejauh a. Jika $a > 0$, maka grafik digeser $f(x)$ kekanan sejauh a satuan dan jika $a < 0$, maka grafik $f(x)$ digeser ke kiri sejauh a satuan. Sedangkan untuk hasil transformasi Fourier terdapat tambahan kernel $e^{-\omega a}$ hal ini disebabkan oleh manipulasi aljabar.

Teorema

Misalkan $f \in L^1$, dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f = e^{iax}f(x)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f\}(\omega - a)$.

Bukti:

Dengan menggunakan definisi transformasi

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{iax}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{iax-i\omega x}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix(a-\omega)}dx$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\omega - a)$$

Baris keempat pembuktian adalah bukti yang diharapkan dari teorema ini. Sedangkan $\mathcal{F}\{f\}(\omega - a)$ disebut *Frequency shift.*

Teorema.

Misalkan $f \in L^1$, dan $a \in \mathbb{R}$, dengan $f = \delta^{-1}f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ maka transformasi Fourier dari f adalah $\mathcal{F}\{f\}(\delta\omega)$..

Bukti.

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier (3.1),

$$\mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \delta^{-1}f\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{-i\omega x}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \delta^{-1}f(u)\, e^{-i\omega\delta u}\delta\, du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \delta^{-1}f(u)\, e^{-i(\omega\delta)u}\delta\, du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(u)\, e^{-i(\omega\delta)u}\, du$$

$$= \mathcal{F}\{f\}(\delta\omega)$$

Baris kedua diperoleh dengan memisalkan, $u = \frac{x}{\delta} \leftrightarrow x = \delta u$,dengan mendiferensialkan kedua ruas diperoleh $dx = \delta du$. Baris terakhir pembuktian disebut *Frequency scale.*

Transformasi Fourier Quaternion

Transformasi Fourier quaternion (TFQ) merupakan perluasan dari transformasi Fourier. Sehingga sifat-sifat yang akan dibuktikan pada TFQ juga merupakan sifat-sifat yang dibuktikan pada transformasi Fourier.

Sifat nonkumutatif quaternion sehingga TFQ dibedakan menjadi tiga jenis, yaitu TFQ sisi kiri, TFQ sisi kanan dan TFQ dua sisi. Namun pada paper ini hanya akan diperkenalkan TFQ sisi kanan selanjutnya adan dibandingkan hasil transformasinya dengan transformasi Fourier klasik. Beikut ini diberikan TFQ sisi kanan.

Berdasarkan sifat nonkomutatif terhadap operasi perkalian maka TFQ dibedakan menjadi tiga tipe yaitu TFQ tipe I (dua sisi)

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$

TFQ tipe II (sisi kanan)

$$\mathcal{F}_q^{II}\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$

TFQ tipe III (sisi kiri)

$$\mathcal{F}_q^{III}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Sedangkan untuk invers transformasi Fourier quaternion (ITFQ) didefinisikan sebagai berikut.

Tipe I ITFQ (dua sisi)

$$\mathcal{F}_q^{-1}\left[\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right](\boldsymbol{x})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} \left(\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right) e^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}\, d\boldsymbol{\omega}.$$

Tipe II ITFQ (sisi kanan)

$$\mathcal{F}_q^{-1}\left[\mathcal{F}_q^{II}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right](\boldsymbol{x})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathcal{F}_q^{II}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right) e^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} e^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}\, d\boldsymbol{\omega}.$$

Tipe III ITFQ (sisi kiri)

$$\mathcal{F}_q^{-1}\left[\mathcal{F}_q^{III}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right](\boldsymbol{x})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} e^{\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} \left(\mathcal{F}_q^{III}\{f\}(\boldsymbol{\omega})\right) d\boldsymbol{\omega}.$$

Penggunaan unit quaternion pada kernel, tidak menimbulkan perbedaan antara satu dengan yang lain dan ini dikenal sebagai bentuk trivial.

Sebelum membahas beberapa teorema yang berkaitan dengan TFQ, perhatikan penggunaan kernel berikut,

$$\left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right)e^{\boldsymbol{i\omega x}} = e^{\boldsymbol{i\omega x}}\left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right).$$

Hal ini disebabkan karena

$$e^{\boldsymbol{i\omega x}}\left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right)$$
$$= (\cos \boldsymbol{\omega x} + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x})\left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right)$$
$$= \cos \boldsymbol{\omega x}\, f_0(\boldsymbol{x}) + \cos \boldsymbol{\omega x}\, \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})$$
$$+ \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x}\, f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x}\, \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})$$
$$= \left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right)(\cos \boldsymbol{\omega x} + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x})$$
$$= e^{\boldsymbol{i\omega x}}\left(f_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{i}f_1(\boldsymbol{x})\right)$$

Berbeda jika, perkalian dilakukan pada unsure $\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$,

$$\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)e^{\boldsymbol{i\omega x}} = e^{-\boldsymbol{ix\omega}}\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)$$

Ini diperoleh dengan melalui proses berikut

$$\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)e^{\boldsymbol{i\omega x}}$$
$$= \left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)(\cos \boldsymbol{\omega x} + \boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x})$$
$$= (\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x} + \boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$+ \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{i}\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$= (\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x} + \boldsymbol{ji}f_2(\boldsymbol{x})\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$+ \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x}) + \boldsymbol{ki}f_3(\boldsymbol{x})\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$= (\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x} + (-\boldsymbol{i})\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$+ \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\cos \boldsymbol{\omega x}) + (-\boldsymbol{i})\boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\sin \boldsymbol{\omega x}$$
$$= (\cos \boldsymbol{\omega x} + (-\boldsymbol{i})\sin \boldsymbol{\omega x})\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x})\right)$$
$$+(\cos \boldsymbol{\omega x} + (-\boldsymbol{i})\sin \boldsymbol{\omega x})\left(\boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)$$
$$= (\cos \boldsymbol{\omega x} + (-\boldsymbol{i})\sin \boldsymbol{\omega x})\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right)$$
$$= e^{-\boldsymbol{ix\omega}}\left(\boldsymbol{j}f_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}f_3(\boldsymbol{x})\right).$$

Demikian juga, jika perkalian dengan menggunakan kernel laiinya. Selanjutnya, akan dibahas teorema pertama TFQ.

Teorema: Frequency reversal

Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R}:\mathbb{H})$, dengan $f = f(-\boldsymbol{x})$

Maka TFQ dari f adalah $\mathcal{F}_q\{f\}(-\boldsymbol{\omega})$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi TFQ,

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(-\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$

Dengan manipulasi aljabar,

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}(-\omega_1)(-x)_1} f(-\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}(-\omega_2)(-x_2)} d\boldsymbol{x}.$$
$$= \mathcal{F}_q\{f\}(-\boldsymbol{\omega})$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema Linearity

Misalkan $f, g \in L^2(\mathbb{R}:\mathbb{H})$, linearitas TFQ dinyatakan dengan

$$\mathcal{F}_q\{\alpha f + \beta g\}(\boldsymbol{\omega}) = \alpha\, \mathcal{F}_q\{f\} + \beta\, \mathcal{F}_q\{g\}$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi TFQ

$$\mathcal{F}_q\{\alpha f + \beta g\}(\boldsymbol{\omega})$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1}\left(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\right) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} \alpha f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}. + \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} \beta g(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$
$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}. + \beta \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} g(\boldsymbol{x}) e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2} d\boldsymbol{x}.$$
$$= \alpha\, \mathcal{F}_q\{f\} + \beta\, \mathcal{F}_q\{g\}$$

Teorema: Spatial Shift

Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R}:\mathbb{H})$, dengan $f = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$, maka TFQ dari f adalah

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_{01}}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_{02}}$$

Bukti:

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}d\boldsymbol{x}.$$

Misalkan $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{v}$ dan $d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1(x_{01}+v_1)} f(\boldsymbol{v})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2(x_{02}+v_2)}d\boldsymbol{v}. \\
&= e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_{01}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 v_1} f(\boldsymbol{v})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 v_2}d\boldsymbol{v}\right)\times \\
&\quad e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_{02}} \\
&= e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_{01}}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_{02}}
\end{aligned}$$

Teorema: Spatial Scale

Misalkan $f \in L^2(\mathbb{R}:\mathbb{H})$, dengan $f = f(\boldsymbol{\alpha x}), \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{H}$ maka TFQ dari f adalah

Bukti:

$$\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\boldsymbol{i}\omega_1 x_1} f(\boldsymbol{\alpha x})e^{-\boldsymbol{j}\omega_2 x_2}d\boldsymbol{x}.$$

Misalkan $\boldsymbol{\alpha x} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{\alpha}}, d\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{du}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\boldsymbol{i}\omega_1 u_1}{\alpha_1}} f(\boldsymbol{u})e^{-\frac{\boldsymbol{j}\omega_2 u_2}{\alpha_2}}d\boldsymbol{x}. \\
&= \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{F}_q\{f\}(\boldsymbol{\omega}/\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh, maka diambil kesimpulan sebagai:

Sifat-sifat yang dalam Transformasi Fourier juga berlaku pada trasnformasi fourier quaternion. Adapun sifat-sifat yang dimaksudkan adalah, frequency reversal, linearitas, pergeseran dan pengskalaan.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bahri, M,. Ashino, R., and Vailancourt, R. 2013. Convolution theorems for quaternion Fourier transform, properties and applications, *Hindawi Publishing Corporation Abstact and Applied Analysis*, vol. 2013, ID 162769 : 1-2.

[2] Bahri, M., Ashino, R. 2013. Correlation theorems for type II quaternion Fourier transform, *International conference on wavelet analysis and pattern recognition*. 136-141.

[3] Bahri, M., Hitzer, Ashino, R., and Hayasi, A. 2008. An uncertainty principle for quaternion fourier transform. *Computer and Mathematics with Applications*. 56: 2398.

[4] Hitzer, E. M. S. 2013. Quaternion Fourier Trasform on Quaternion Field and Generalization. *Advance Applications of Clifford Algebras*. 17: 1-20.

[4] http://personal.fmipa.itb.ac.id /hgunawan/my-courses/fourier-analysis/

[5] Morais, J.P., Geogiev S., Sprosieg, W. 2012. *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Springer Basel: Hidelberg New York London.

[6] Resnawati. 2013. *Transformasi Kanonikal Linear Quaternion*. Tesis. Makassar: Program Pascasarjana-UNHAS.

[7] Soo-Chang, Pei, IEEE, Ding, JJ, and Chang J.H. 2001. Efficient Implementation of Quaternion Fourier Transform, Convolution, and Correlation by 2-D Complex FFT. *IEEE Transactions On Signal Processing*. 11: 1-14.

[8] Supriadi, S. 2012. Prinsip Ketidakpastian Heisenberg Untuk Transformasi Fourier Quaternion Dua Sisi. Tesis, Makassar: Program Pascasarjana-UNHAS.

[9] Todd, dkk. 2014. Quaternion Fourier Transform for Signal and Image Processing, Fokus.