PERSAMAAN DIFFERENSIAL EKSAK DENGAN FAKTOR INTEGRASI

Risnawati Ibnas[i]

[i] Prodi Matematika FST, UINAM, risnawati.ibnas@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Persamaan diferensial (PD) merupakan salah satu cabang dari matematikayang banyak digunakan untuk masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknologi. Persamaan differensial biasa (PDB) adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi beserta turunannya terhadap terhadap satu peubah bebas. Bentuk umum persamaan differensial orde satu, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Adapun beberapa metode dalam menyelesaikan persamaan differensial orde satu diantaranya Persamaan differensial Eksak dan pencarian faktor integrasi untuk menyelesaikan persamaan differensial yang tidak eksak.

***Kata Kunci**: persamaan diferensial (PD), PDB, PD peubah terpisah, PD homogen, PD eksak, dan PD factor integrasi.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, ilmu ekonomi dan berbagai macam disiplin ilmu. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi, bilamana hubungan deterministik yang melibatkan besaran yang berubah secara kontinu dimodelkan oleh fungsi matematika dan laju perubahannya dinyatakan sebagai turunan diketahui atau dipostulatkan.

Persamaan diferensial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Jika model matematika berbentuk persamaan diferensial, maka masalahnya adalah bagaimana menentukan solusi (penyelesaian) persamaan diferensial itu. Namun, harus disadari tidak semua model matematika yang berbentuk persamaan diferensial mempunyai solusi.

Pada dasarnya persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa

(PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP). Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk: $F(x, y, y', y", \dots, y^{(n)}) = 0$ yang menyatakan hubungan antara peubah bebas x, peubah terikat $y(x)$ dan turunannya yaitu $y', y", \dots, y^{(n)}$ Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut adalah turunan ke n.

Persamaan diferensial biasa orde satu dapat diklasifikasikan dalam beberapa bentuk persamaan, yaitu persamaan linier, persamaan Bernoulli, persamaan homogen, persamaan yang dapat dipisahkan, dan persamaan eksak serta faktor integrasi. Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial eksak dan penentuan factor integrasi agar persamaan differensial yang tidak eksak dapat diselesaikan.

2. TINJAUANPUSTAKA

Persamaan diferensial biasa (PDB) - *Ordinary Differential Equations* (ODE).

PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas.

Peubah bebas biasanya disimbolkan dengan *x*.

Contoh-contoh persamaan berikut adalah persamaan diferensial biasa (PDB):

1. $\frac{dy}{dx} = 6x + 5$
2. $e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$
3. $2\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + 4xy = 0$
4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$

Contoh di atas adalah contoh persamaan diferensial biasa (PDB) karena fungsi *y* yang tidak diketahui dan terdiri hanya pada variable independen *x*.

Orde dan Pangkat PD

Orde pada Persamaan Diferensial adalah orde dari turunan yang terdapat pada persamaan itu yang tingkatannya paling tinggi

Pangkat pada Persamaan Diferensial adalah pangkat tertinggi dari perkalian peubah tak bebas beserta turunan – turunannya yang terdapat dalam persamaan diferensial.

Contoh :

1. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 5xy = \cos x$

   PDB orde 2 derajat 2 ⇨

   PDB orde 2 derajat 2

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2y\left(x^2+3\right) = \sin x$

   ⇨

   PDB orde 1 derajat 3

   PDB orde 1 derajat 3

3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 4x$

   ⇨

   PDB orde 3 derajat 1

   PDB orde 3 derajat

Metode untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Orde 1:

Bentuk umum :

Dari PD orde satu dalam fungsi *y(x)* yang dicari adalah :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \dots (1)$$

Sisi kanan dapat dituliskan sebagai pembagian dua fungsi lainnya $M_{(x,y)}$dan $-N_{(x,y)}$. Dengan demikian, persamaan (1) menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_{(x,y)}}{-N_{(x,y)}}$$

yang ekuivalen dengan bentuk persamaan :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Integral Tak Tentu

Konsep integral tak tentu diperkenalkan sebagai kebalikan operasi pendeferensialan, yakni sebagai bentuk paling umum dari “ anti turunan”.

Definisi :

Anti turunan dari fungsi $f(x)$ dinotasikan sebagai :

$$\int f(x)\ dx$$

Yang dinamakan “integral tak tentu dari f”

Dalam hal ini, jika $F'^{(x)} = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C, C$ konstanta integrasi.

Kaidah integral tentu :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$$

Contoh :

$$\int 2x^3 + 3 = \frac{1}{2}x^4 + 3x$$

Persamaan Diferensial Eksak

Definisi:

Persamaan $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut persamaan diferensial eksak dalam daerah *D* bila $\exists$ fungsi $f(x,y) = C$ (*C* = konstan) sehingga $df\left(x,y\right) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$. Solusi umum PD eksak berbentuk $f(x,y) = C$.

Teorema:

Misalkan fungsi $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ mempunyai turunan pertama yang kontinu pada daerah *D*, maka:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

kontinu di daerah *D* jika dan hanya jika:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ untuk semua *(x,y)* dalam *D.*

Persamaan Diferensial Faktor Integrasi

Definisi :

Jika persamaan $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ adalah persamaan diferensial tak eksak. Akan tetapi, bila $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dikaitkan dengan suatu fungsi $u(x,y)$ sehingga :

$$u(x,y)\left[M(x,y)dx + N(x,y)dy\right] = 0$$

merupakan persamaan diferensial eksak, maka fungsi $u(x,y)$ dinamakan faktor integrasi.

Dalam menentukan faktor integrasi suatu persamaan diferensial yang bukan eksak, ada beberapa petunjuk untuk menentukan faktor integrasi.

Pandang persamaan :

$$u(x,y)\left[M(x,y)dx + N(x,y)dy\right] = 0$$

merupakan PD eksak. Berarti :

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial u}{\partial y} = u\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}$$

Dari persamaan di atas, nilai u dapat dicari dan setelah nilai u diperoleh, selanjutnya di substitusi ke persamaan :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Sehingga diperoleh suatu PD eksak.

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan faktor integrasi, ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu :

1. Telah ditentukan jenis faktor integrasinya
2. Bila tidak dicantumkan jenis dari faktor integrasinya. Jika ditemukan PD seperti ini, maka perlu dicari terlebih dahulu faktor integrasinya yang selanjutnya akan disubstitusi ke persamaan diferensial awal sehingga menghasilkan persamaan diferensial eksak.

3. METODOLOGI

Prosedur Analisis

Langkah-langkah penyelesaian persamaan differensial, menentukan $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ kemudian dicari $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}$ dan $\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial y}$. Jika $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[N(x,y)]}{\partial y}$, maka dilakukan langkah :

1. Dari definisi dapat dilihat bahwa :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)\, atau \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Maka :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

2. Integralkan $M(x,y)$ tehadap x dengan y tetap

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx = M(x,y)dx$$

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y)$$

di mana $\phi(y)$ adalah fungsi sebarang dari y saja.atau

$$\frac{\partial f}{\partial y}dy = N(x,y)dy$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dx + \gamma(x)$$

3. Fungsi *(x,y)* pada langkah 2 diturunkan (dideferensialkan) parsial terhadap y atau x diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right] + \frac{d\phi}{dy} = N$$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \phi'(y)$$

$$\phi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dy$$

$$\phi(y) = \int \phi'(y)dy$$

yang selanjutnya $\phi(y)$ disubstitusikan ke $f(x,y)$ pada langkah 2. atau

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)dy\right] + \frac{d\gamma}{dx} = M$$

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy + \gamma'(x)$$

$$\gamma'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx$$

$$\gamma(x) = \int \gamma'(x)dx$$

yang selanjutnya $\gamma(x)$ disubstitusikan ke $f(x,y)$ pada langkah 2.

4. Dengan demikian diperoleh nilai $f(x,y) = C$

Namun, jika $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y} \neq \frac{\partial[N(x,y)]}{\partial y}$

1. Telah ditentukan jenis faktor integrasinya. Misalnya faktor integrasi fungsi dari x, y atau $u(x), u(y)$ dan sebagainya.

Dalam hal ini, kita boleh memasukkan jenis dari faktor integrasinya ke dalam persamaan :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y}$$

2. Bila tidak dicantumkan jenis dari faktor integrasinya. Jika ditemukan PD seperti ini, maka perlu dicari terlebih dahulu faktor integrasi yang selesai. Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam mencari jenis dan nilai dari faktor integrasinya, yaitu :

a. Bila faktor integrasinya bergantung dari *x*, maka :

$$u=u(x)\quad ;\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}\ \ dan\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dx}-0$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dx}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N}dx=\frac{du}{u}$$

b. Bila faktor integrasinya bergantung dari *y*, maka :

$$u=u(y)\quad ;\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}\ \ dan\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0-M\frac{du}{dy}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-M\frac{du}{dy}$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M}dy=\frac{du}{du}$$

c. Bila faktor integrasinya bergantung dari $(x\pm y)$, maka :

$$u=u(z)=u(x\pm y)\quad ;\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\pm\frac{\partial u}{\partial z}$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dz}\pm M\frac{du}{dz}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=(N\pm M)\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(N\pm M)}dz=\frac{du}{u}$$

d. Bila faktor integrasinya bergantung dari (xy), maka :

$$u=u(z)=u(xy)\quad ;\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial z}$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=Ny\frac{du}{dz}-Mx\frac{du}{dz}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=(Ny-Mx)\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Ny-Mx)}dz=\frac{du}{u}$$

e. Bila faktor integrasinya bergantung dari (x^2+y^2), maka :

$$u=u(z)=u(x^2+y^2)\quad ;\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\partial x\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\partial y\frac{\partial u}{\partial z}$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\cdot\partial x\frac{du}{dz}-M\cdot\partial y\frac{du}{dz}$$

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\left(\partial x\cdot N-\partial y\cdot M\right)\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{\left(\partial x\cdot N-\partial y\cdot M\right)}dz=\frac{du}{u}$$

Kemudian nilai dari factor integrasi dikalikan kembali ke persamaan differensial awal, kemudian dilakukan pengujian $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial y}$ selanjutnya dilakukan langkah penyelesaian persamaan differensial eksak untuk memperoleh solusi PD.

4. PEMBAHASAN

Kasus untuk persamaan differensial Eksak

Selesaikan Persamaan differensial berikut :

$$(2xy-sec^2x)dx+(x^2+2y)dy=0$$

Penyelesaian :

$M(x,y)=(2xy-sec^2x)$ dan

$N(x,y)=(x^2+2y)$

Maka $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial\left(2xy-sec^2x\right)}{\partial y}=2x$

$$\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+2y)}{\partial x}=2x$$

Ini berarti :

$$\frac{\partial[m(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}\ (PD\ eksak)$$

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\emptyset(y)$$

$$=\int(2xy-sec^2x)dx+\emptyset(y)$$

$$=x^2y-tanx+\emptyset(y)$$

$$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y}=N$$

$$\frac{\partial[x^2y-tanx+\emptyset(y)]}{\partial y}=(x^2+2y)$$

$$x^2+\emptyset'(x)=x^2+2y$$

$$\emptyset'(y)=2y$$

$$\emptyset(y)=y^2$$

$$f(x,y)=x^2y-tanx+y^2$$

Jadi, solusi persamaan differensial $(2xy-sec^2x)dx+(x^2+2y)dy=0$ adalah $f(x,y)=x^2y-tanx+y^2$.

Kasus untuk persamaan differensial noneksak dengan diketahui faktor integrasi dari fungsi x.

Diketahui Persamaan differensial $(3-2y)dx+(x^2-1)dy=0$ yang hanya mempunyai suatu faktor integrasi dari fungsi x. Tentukan faktor integrasi kemudian selesaikan PD tersebut.

Solusi :

$M(x,y)=(3-2y)$ dan

$N(x,y)=(x^2-1)$

Maka $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial(3-2y)}{\partial y}=-2$

$$\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial(x^2-1)}{\partial x}=2x$$

Ini berarti :

$$\frac{\partial[m(x,y)]}{\partial y}\neq\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}$$

Karena

$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$ *persamaan diferensial non eksak*

, maka perlu dicari faktor integrasinya.

Faktor integrasi fungsi dari x, maka :

$$u=u(x)\quad ;\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dx}\ \ dan\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dx}-0$$

$$u(-2-2x)=(x^2-1)\frac{du}{dx}$$

$\frac{(-2-2x)}{(x^2-1)}dx=\frac{du}{u}$ (PD peubah terpisah)

$$\int\frac{(-2-2x)}{(x^2-1)}dx=\int\frac{du}{u}$$

$$\ln u=-\int\frac{2}{x^2-1}dx-\int\frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$\ln u=-\ln|x^2-1|-\ln|x-1|+\ln|x+1|$$

$u=\frac{1}{(x-1)^2}\Rightarrow$ Faktor integrasi

Maka, PD menjadi :

$$\left[\frac{1}{(x-1)^2}(3-2y)\right]dx+\left[\frac{1}{(x-1)^2}(x^2-1)\right]dy=0$$

$M(x,y)=\frac{(3-2y)}{(x-1)^2}$ dan

$$N(x,y)=\frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}$$

Maka $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial\frac{(3-2y)}{(x-1)^2}}{\partial y}=\frac{-2}{(x-1)^2}$

$$\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial\frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}}{\partial x}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

Ini berarti :

$$\frac{\partial[m(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}$$

Solusi PD eksak :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=N$$

$$f(x,y)=\int N(x,y)dx+\gamma(x)$$

$$=\int\frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}dx+\gamma(x)$$

$$=\frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}y+\gamma(x)$$

$$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}=M$$

$$\frac{\partial\left[\frac{(x^2-1)}{(x-1)^2}y+\gamma(x)\right]}{\partial x}=\frac{(3-2y)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{-2y}{(x-1)^2}+\gamma'(x)=\frac{(3-2y)}{(x-1)^2}$$

$$\gamma'(x)=\frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma\quad(x)=\frac{3}{(\mathrm{x}-1)}+c$$

$$f(x,y)=y(x+1)-3+c(x-1)$$

Jadi, solusi persamaan differensial $(3-2y)dx+(x^2-1)dy=0$ adalah $f(x,y)=y(x+1)-3+c(x-1)$

Kasus untuk factor integrasi dari fungsi (x+y).

Diketahui Persamaan differensial : $\left(x^2+3x+2\right)dx+\left(x^2+x+1\right)dy=0$.

Tentukan solusi PD tersebut dengan faktor integrasi fungsi $(x+y)$.

Solusi :

$$M=x^2+3x+2\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

$$N=x^2+x+1\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=2x+1$$

Karena

$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$ *persamaan diferensial non eksak*

, maka perlu dicari faktor integrasinya.

Karena faktor integrasi fungsi dari $(x+y)$, maka :

$$u=u(z)=u(x+y)\qquad;\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{du}{dz}-M\frac{du}{dz}$$

$$u\left(0-(2x+1)\right)=\left(x^2+x+1\right)\frac{du}{dz}-\left(x^2+3x+2\right)\frac{du}{dz}$$

$$u(-2x+1)=(-2x+1)\frac{du}{dz}$$

$$\frac{(-2x+1)}{(-2x+1)}dz=\frac{du}{u}$$

$$dz=\frac{1}{u}du\Rightarrow \textit{persamaan diferensial terpisah}$$

$$\int dz=\int\frac{1}{u}du$$

$$z=\ln u$$

$$u=e^z\qquad;karena\quad z=(x+y),maka:$$

$$u=e^{x+y}$$

Maka, PD menjadi :

$$e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)dx+e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)dy=0$$

$$M=e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)$$

$$N=e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=(2x+1)e^{x+y}+e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)$$

$$=\left(x^2+3x+2\right)e^{x+y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow \textit{persamaan diferensial eksak}$$

Solusi PD eksak :

- ❖ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)$

$$f(x,y)=\int e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)dy+\phi(x)$$

$$f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)+\phi(x)$$

❖ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M$

$$\frac{\partial f\left(e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)+\phi(x)\right)}{\partial x}=e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)$$

$$e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)+\phi'(x)=e^{x+y}\left(x^2+3x+2\right)$$

$$\phi'(x)=0$$

$$\phi(x)=\int 0 \quad dx$$

$$\phi(x)=C$$

Jadi, $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+x+1\right)+C_1=C_0$

Kasus untuk factor integrasi dari fungsi y.

Selesaikan persamaan differensial $2xy\,dx+(2x^2+3)dy=0$ mempunyai factor integrasi fungsi dari y

Penyelesaian :

$M(x,y)=2xy$ dan

$N(x,y)=(2x^2+3)$

Maka $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x$

$$\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial(2x^2+3)}{\partial x}=4x$$

Ini berarti :

$$\frac{\partial[m(x,y)]}{\partial y}\neq\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}$$

Selanjutnya akan dicari factor integrasi :

$u=u(y);\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{du}{dy}$ dan $\frac{\partial u}{\partial x}=0$

$$u(2x-4x)=-(2xy)\frac{du}{dy}$$

$$u(-2x)=-(2xy)\frac{du}{dy}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{du}{u}$$

$\ln y=\ln u$

$u=y$ (factor integrasi)

Jika factor integrasi dikalikan kepersamaan awal diperoleh :

$y(2xy)\,dx+y(2x^2+3)dy=0$

$(2xy^2)dx+(2yx^2+3y)dy=0$

$M(x,y)=(2xy^2)$ dan

$N(x,y)=(2yx^2+3y)$

Maka $\frac{\partial[M(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial(2xy^2)}{\partial y}=4xy$

$$\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}=\frac{\partial(2yx^2+3y)}{\partial x}=4xy$$

Ini berarti :

$$\frac{\partial[m(x,y)]}{\partial y}=\frac{\partial[N(x,y)]}{\partial x}$$

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\emptyset(y)$$

$$=\int(2xy^2)dx+\emptyset(y)$$

$$=x^2y^2+\emptyset(y)$$

$$\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y}=N$$

$$\frac{\partial[x^2y^2+\emptyset(y)]}{\partial y}=2yx^2+3y$$

$$2x^2y+\emptyset'(x)=2yx^2+3y$$

$$\emptyset'(y)=3y$$

$$\emptyset(y)=\frac{3}{2}y^2$$

$$f(x,y)=x^2y^2+\frac{3}{2}y^2$$

Jadi, solusi persamaan diferensial $2xy\,dx+(2x^2+3)dy=0$ adalah

$$f(x,y)=x^2y^2+\frac{3}{2}y^2$$

Kasus untuk factor integrasi dari fungsi (xy)

Diketahui PD $\left(xy^2+y\right)dx+x\quad dy=0$. Tentukan solusi PD tersebut dengan faktor integrasi dari fungsi *xy*.

Solusi :

$$M=xy^2+y\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+1$$

$$N=x\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=1$$

Karena

$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$ *persamaan diferensial non eksak*

, maka perlu dicari faktor integrasinya.

Karena faktor integrasi fungsi dari *xy*, maka :

$$u=u(z)=u(xy)\qquad;\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial u}{\partial z}$$

Jadi, faktor integrasinya diperoleh :

$$u\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = Ny\frac{du}{dz} - Mx\frac{du}{dz}$$

$$u(2xy+1-1) = x \cdot y\frac{du}{dz} - \left(xy^2+y\right)x\frac{du}{dz}$$

$$u(2xy) = \left(xy - x^2y^2 - xy\right)\frac{du}{dz}$$

$$\frac{2xy}{\left(xy - x^2y^2 - xy\right)}dz = \frac{du}{u}$$

$$-\frac{2xy}{x^2y^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$-\frac{2}{xy}dz = \frac{1}{u}du \Rightarrow persamaan \quad diferensial \quad terpisah$$

$$-2\int\frac{1}{z}dz - \int\frac{1}{u}du = \int 0$$

$$-2\ln z - \ln u = C$$

$$z^{-2} = u$$

$$u = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Maka, PD menjadi :

$$\frac{xy^2+y}{x^2y^2}dx + \frac{x}{x^2y^2}dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2y}\right)dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

$$M = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2y} = x^{-1} + x^{-2}y^{-1} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -x^{-2}y^{-2} = -\frac{1}{x^2y^2}$$

$$N = \frac{1}{xy^2} = x^{-1}y^{-2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -x^{-2}y^{-2} = -\frac{1}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow persamaan \quad diferensial \quad eksak$$

Solusi PD eksak :

- ❖ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}$

$$f(x,y) = \int\frac{1}{xy^2}dy + \phi(x)$$

$$f(x,y) = -x^{-1}y^{-1} + \phi(x)$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{xy} + \phi(x)$$

- ❖ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M$

$$\frac{\partial f\left(-\frac{1}{xy} + \phi(x)\right)}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2y}$$

$$\frac{1}{x^2y} + \phi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2y}$$

$$\phi'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\phi(x) = \int\frac{1}{x}dx$$

$$\phi(x) = \ln x + C$$

Jadi, $f(x,y) = -\frac{1}{xy} + \ln x + C$

5. KESIMPULAN

Hasil pembahasan menunjukkan bahwa persamaan diferensial eksak dapat diselesaikan dengan mudah sesuai dengan langkah-langkah penyelesaian, namun terdapat beberapa persamaan diferensial yang tidak eksak sehingga terlebih dahulu dicari faktor integrasinya, dimana terdapat beberapa langkah yang berbeda untuk mencari faktor integrasi dari persamaan diferensial awal. Dari bentuk faktor integrasi yang diperoleh, dikalikan kembali ke persamaan awal sehingga akan membentuk persamaan diferensial eksak yang selanjutkan persamaan diferensial tersebut diselesaikan dengan langkah yang sama pada penyelesaian persamaan diferensial eksak.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa :

1. Untuk Persamaan diferensial $(2xy - sec^2x)dx + (x^2+2y)dy = 0$

   Yang merupakan pd eksak diperoleh penyelesaian $f(x,y) = x^2y - tanx + y^2$.
2. Untuk PD $(3-2y)dx + (x^2-1)dy = 0$ yang hanya mempunyai suatu faktor integrasi dari fungsi x diperoleh faktor integrasi $u = \frac{1}{(x-1)^2}$ dan penyelesaian PD yaitu: $f(x,y) = y(x+1) - 3 + c(x-1)$
3. Untuk Persamaan differensial : $\left(x^2+3x+2\right)dx + \left(x^2+x+1\right)dy = 0$ dengan faktor integrasi fungsi $(x+y)$ diperoleh

faktor integrasi $u = e^{x+y}$ dan penyelesaian PD yaitu : $f(x,y) = e^{x+y}(x^2 + x + 1) + C_1 = C_0$

4. Untuk Persamaan differensial : $2xy\,dx + (2x^2 + 3)dy = 0$ mempunyai factor integrasi fungsi dari y diperoleh faktor integrasi $u = y$ dan penyelesaian PD yaitu :
$$f(x,y) = x^2y^2 + \frac{3}{2}y^2$$
5. Untuk Persamaan differensial : $(xy^2 + y)dx + x \quad dy = 0$. mempunyai factor integrasi fungsi dari y diperoleh faktor integrasi $u = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$ dan penyelesaian PD yaitu : $f(x,y) = -\frac{1}{xy} + \ln x + C$

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdul Rahman, M.Pd., Drs., Nursalam, M.Si (2007). "*Persamaan Diferensial Biasa Teori dan Aplikasi*". Buku Daras, Makassar.

[2] Boyce, W.E. and Richard C. Diprima. .(1997).*"Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems."*. Third Edition. New York.

[3] Darmawijoyo. 2011. "*Persamaan Diferensial Biasa*". Palembang :Erlangga.

[4] Granita. 2011. *"Persamaan Diferensial Biasa"*.Pekanbaru: Zanafa Publishing.

[5] Valberg, Purcell, Rigdom. 2003. *"Calclus"* 8th edition". Published by Prentice hall, inc.ISBN :0-13-0811-37-8