Analisis Kestabilan Model Predator-Prey dengan Upaya Pengendalian pada Predator

Ilham
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, Ilham170502@gmail.com

Nadya
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, mnadya732@gmail.com

Haslinda Rahman
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, lindharhman@gmail.com

Siti Aisyah
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, aisyah123pkp@gmail.com

Khaerunnisa
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, khaerunnisa1983@gmail.com

Muh. Yusqo Rohiqul Mahtum
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, muhyusqorohiqul@gmail.com

Hikmawati Pathuddin
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, hikmawati.pathuddin@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK, Penelitian ini membahas tentang model predator-prey dalam ekosistem dengan melibatkan upaya pengendalian pada predator. Penelitian ini berfokus pada dinamika populasi kedua spesies tersebut menggunakan model predator-prey yang telah dimodifikasi. Asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah bahwa prey dikonsumsi oleh predator, predator akan mati jika tidak ada prey, prey meningkat ketika tidak ada predator, predator dapat mengkonsumsi prey dalam jumlah tak terbatas, dan prey mati hanya jika dimangsa oleh predator. Hasil penelitian menunjukkan dua titik keseimbangan: (0,0) yang berarti terjadinya kepunahan di kedua spesies, dan $\left(\frac{m}{a},\frac{r}{a}\right)$ yang menunjukkan eksistensi kedua spesies. Analisis kestabilan menggunakan matriks Jacobi menujukkan bahwa titik keseimbangan kedua stabil jika $m > c$. Penelitian ini memberikan kontribusi dalam pemahaman interaksi spesifik antara predator dan prey, serta memberikan solusi mitigasi untuk mengurangi serangan predator terhadap prey, mendukung upaya konservasi dan pengelolaan sumber daya alam yang berkelanjutan.

Kata Kunci: *Predator, Prey, Titik Kesetimbangan, Kestabilan*

1. PENDAHULUAN

Masalah hubungan pemangsa dan mangsa merupakan salah satu topik penting dalam ekologi yang banyak dikaji untuk memahami dinamika populasi dan interaksi antarspesies dalam suatu ekosistem. Model predator-mangsa pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra pada awal abad ke-20, yang menjelaskan bagaimana dua spesies, predator dan mangsa, berinteraksi dan bagaimana populasi mereka berubah seiring waktu [1].

Dalam artikelnya, Rumlawang (2010) menyajikan eksplorasi mendalam tentang hubungan dinamis antara dua populasi mangsa-pemangsa yang berbeda dan hidup berdampingan dalam lingkungan bersama [2]. Interaksi antara kedua spesies ini diperiksa dengan cermat menggunakan pemodelan matematika, yang diwakili oleh sistem persamaan diferensial biasa nonlinier yang canggih. Model Predator-Prey menunjukkan pengaruh besar satu sama lain. Khususnya, ketika terdapat banyak mangsa yang tersedia untuk dikonsumsi, populasi predator akan meningkat pesat karena kelebihan makanan, dan sebaliknya, jika populasi mangsa menurun, predator juga akan terkena dampaknya. Selain itu, hubungan antara kedua spesies dapat direpresentasikan secara matematis melalui persamaan diferensial [3]. Selama kompetisi, spesies yang berbeda akan menjalani perawatan yang berbeda-beda. Dalam suatu populasi, biasanya terdapat setidaknya dua spesies yang bersaing dalam beberapa bentuk. Spesies-spesies ini mungkin tidak hanya hidup berdampingan dalam populasi yang sama, tetapi juga dalam ekosistem yang sama, yang dapat dianalisis menggunakan model populasi dan serangkaian persamaan untuk setiap spesies [4].

Penelitian sebelumnya telah banyak memfokuskan pada berbagai pasangan predator-prey, seperti singa dan zebra di savana Afrika, serigala dan rusa di Amerika Utara, serta ikan pemangsa dan plankton di ekosistem laut [5]. Penelitian ini mengadaptasi model Lotka-Volterra dengan beberapa modifikasi yang mempertimbangkan upaya mitigasi yang dapat dilakukan untuk mengurangi serangan predator terhadap prey. Pada penelitian ini juga dilakukan simulasi numerik untuk memvalidasi model yang dikembangkan, yang memberikan kontribusi penting dalam upaya konservasi dan pengelolaan sumber daya alam secara berkelanjutan.

2. TINJAUANPUSTAKA

Model Predator-Prey

Model matematika sering digunakan dalam proses pemecahan masalah, membantu pengembangan solusi. Dalam bukunya [6], memperkenalkan model dua spesies yang saling berinteraksi. Hal ini memberikan ilustrasi sederhana namun mendalam tentang dinamika yang terjadi ketika dua spesies bersaing untuk mendapatkan sumber makanan yang sama. Interaksi penting lainnya yang perlu dipertimbangkan adalah interaksi predator dan mangsa. Model ini terdiri dari dua persamaan diferensial yang menggambarkan perubahan populasi predator dan prey dari waktu ke waktu. Persamaan tersebut adalah:

$$\frac{dN}{dt} = rN - aNP \qquad (2.1)$$
$$\frac{dP}{dt} = -sP + bNP$$

di mana:

N adalah populasi prey,
P adalah populasi predator,
r adalah laju pertumbuhan prey,
a adalah laju predasi,
s adalah laju kematian predator,
b adalah laju reproduksi predator per prey yang dikonsumsi

Titik Kesetimbangan

Titik (x_i, y_i) adalah titik kesetimbangan suatu persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (2.2)$$
$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

Jika $f(t,x) = 0$ dan $f(t,y) = 0$ untuk semua nilai t. Oleh karena itu, maka (x_i, y_i) merupakan penyelesaian sistem untuk semua t. Untuk menganalisis kestabilan pada titik kesetimbangan system, maka terlebih dahulu harus diketahi Solusi dari system tersebut [7].

Matriks Jacobian

Dalam menghitung turunan parsialnya dapat didapat matriks jacobiannya sebagai berikut:

$$J: \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Matriks diatas adalah rumus matriks untuk mendapatkan matriks jacobian [8].

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Terdapat matriks koefisien konstan A berukuran $n \times n$ pada sistem persamaan diferensial biasa homogen $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$, $\boldsymbol{x} \in R^n$.(Widia et al., n.d.). Suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n dapat dikatakan sebagai vektor eigen dari A jika untuk suatu skalar λ berlaku

$$Ax = \lambda x$$

Nilai skalar λ dinamakan nilai eigen dari A.

Untuk mencari nilai λ dari A, maka sistem persamaan dapat ditulis:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

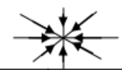
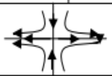
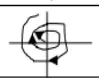
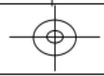
Dengan I adalah matriks identitas. Sistem persamaan diatas mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan karakteristik matriks A [9].

Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dari sistem otonomus berdasarkan nilai eigen.

x'= Ax Nilai eigen	det(λ - A) = 0 Tipe titik kesetimbangan	det A ≠ 0 stabilitas	Ruang Fase
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil	
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik pelana	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a > 0$	Titik spiral	Tidak stabil	
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib$ $a < 0$	Titik spiral	Stabil asimtotik	
$\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$	Pusat atau titik spiral (fokus)	Tak tentu	

Gambar 4.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan

3. METODOLOGI

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Secara umum, langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuat asumsi dari masalah yang diteliti.
2. Membentuk model dari hasil asumsi.
3. Menentukan titik keseimbangan dari model.
4. Menentukan matriks jacobi.
5. Melakukan analisis kestabilan.
6. Menentukan simulasi numerik.
7. Membuat Kesimpulan

4. PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

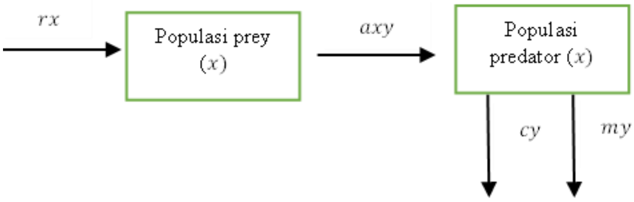
Beberapa elemen mempengaruhi model predator-prey. Sementara itu, unsur-unsur yang mempengaruhi laju pertumbuhan dan kepadatan spesies predator adalah tingkat maksimum, laju kematian dan tingkat predator. Model ini didasarkan pada asumsi berikut.

1. Prey yang masih berukuran kecil dikonsumsi oleh predator.
2. Predator akan kelaparan/ mati ketika tidak ada prey.
3. Prey akan meningkat ketika tidak ada predator.
4. Predator dapat mengkonsumsi prey dalam jumlah yang tidak terbatas.
5. Prey akan mati ketika hanya dimangsa oleh predator.
6. Predator akan berkurang ketika terkena jebakan.

Model

Variabel dalam penelitian ini adalah:

x : populasi prey (mangsa)
y : populasi predator (pemangsa)
r : laju pertumbuhan
a : laju interaksi
m : laju kematian predator (pemangsa)
c : laju pengendalian predator (pemangsa)



Gambar 4.2 Diagram Model Predator Prey

Dari diagram di atas, model dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = rx - axy \qquad (4.1)$$
$$\frac{dy}{dt} = axy - my - cy \qquad (4.2)$$

dengan semua parameter bernilai positif.

Titik Kesetimbangan

Sistem pada persamaan (4.1) dan (4.2) dikatakan setimbang jika memenuhi syarat berikut.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

Dari persamaan (4.1):

$rx - axy = 0$
$x\,(r - ay) = 0$
$x = 0$ atau $r - ay = 0$
$r = ay$

$$y = \frac{r}{a}$$

Dari persamaan (4.2):

axy – my – cy = 0
y (ax – m – c) =0
y =0 atau *ax – m – c =0*

$$ax = m + c$$
$$x = \frac{m+c}{a}$$

Maka diperoleh titik kesetimbangan (0,0), $\left(\frac{m+c}{a}, \frac{r}{a}\right)$

Titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik kepunahan kedua spesies. Sedangkan, $\left(\frac{m+c}{a}, \frac{r}{a}\right)$ titik yang menunjukkan eksistensi kedua spesies. Dan dari titik kesetimbangan yang telah didapatkan tersebut, akan dianalisis kestabilannya.

Analisis Kestabilan

Kestabilan titik kesetimbangan dianalisis dengan terlebih dahulu melinearisasi system dengan matriks Jacobian.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - ay & -ax \\ ay & ax - m - c \end{bmatrix}$$

Titik kesetimbangan (0,0):

$$J = \begin{bmatrix} r - a(0) & -a(0) \\ a(0) & a(0) - m - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m - c \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik:

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -m - c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -m - c - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -m - c - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(r - \lambda)\,(-m - c - \lambda) - 0 = 0$$

$$\lambda_1 = r\,, \qquad \lambda_2 = -m - c$$

Karena λ_1 positif dan λ_2 negatif, maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik pelana sehingga titik kesetimbangan ini tidak stabil.

Titik Kesetimbangan $\left(\frac{m+c}{a}, \frac{r}{a}\right)$:

$$\begin{bmatrix} r - a\left(\frac{r}{a}\right) & -a\left(\frac{m+c}{a}\right) \\ a\left(\frac{r}{a}\right) & a\left(\frac{m+c}{a}\right) - m - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -m - c \\ r & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik:

$$\begin{bmatrix} 0 & -m - c \\ r & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -m - c \\ r & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -m - c \\ r & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-\lambda(-\lambda)) - ((-m - c)\,r) = 0$$

$$\lambda^2 + (rm + rc) = 0$$

$$\lambda^2 = -(rm + rc)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-(rm + rc)}$$

Misalkan $(rm + rc) = A$, maka $\lambda_{1,2}$ dapat ditulis sebagai berikut.

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A} = \pm\, i\sqrt{A}$. Karena nilai eigennya merupakan imajiner murni, maka berdasarkan jenisnya, titik kesetimbangan ini merupakan titik center sehingga stabil netral (stabil tapi tidak asimtotik).

Selanjutnya akan dianalisis pengaruh upaya pengendalian pada predator. Untuk parameter c sebagai parameter pengendali, dapat dilihat bahwa jika $c = 0$ maka persamaan karakteristik menjadi:

$$\lambda^2 + rm = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda^2 = -rm$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-rm} = \pm i\sqrt{rm}$$

Nilai eigen ini merupakan imajiner murni sehingga titik kesetimbangan stabil netral. Hal ini menunjukkan bahwa upaya pengendalian (c) tidak mempengaruhi kestabilan.

Simulasi Numerik

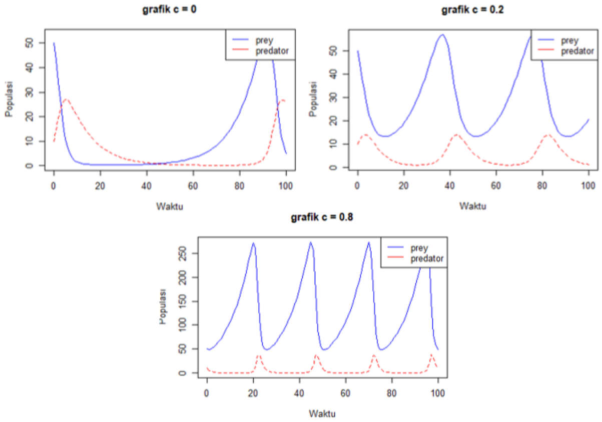
Pada model ini, akan dilakukan simulasi numerik dengan nilai parameter sebagai berikut.

Tabel 4.1 Nilai Parameter

Parameter	r	a	n	m	c
Nilai	0.1	0.02	0.01	0.1	0.0 0.2

					0.8

Simulasi akan dilakukan dengan memberikan tiga nilai c yang berbeda. Berikut adalah grafik prey (x) dan predator (y). Grafik pertama yaitu grafik dengan nilai $c = 0$, grafik kedua yaitu grafik dengan nilai $c = 0.2$, dan grafik ketiga yaitu grafik dengan nilai $c = 0.8$. Adapun nilai awal yang diberikan adalah $x = 50$ dan $y = 10$



Gambar 4.3 Simulasi Numerik dengan Nilai c yang Berbeda

Grafik di atas menunjukkan dinamika populasi prey (garis biru) dan predator (garis merah) dalam kurun waktu tertentu. Adapun interpretasi dari ketiga grafik yang ditunjukkan pada simulasi di atas adalag sebagai berikut.

1. **Grafik $c = 0$:**
   - Pada grafik ini, nilai $c = 0$, yang berarti tidak ada upaya yang diaalkukan untuk menanggulangi keberadaan predator.
   - Populasi prey mula-mula sebanyak 50 ekor, kemudian menurun drastis, dan perlahan-lahan meningkat kembali menuju akhir periode waktu.
   - Populasi predator memiliki pola serupa, tetapi dengan amplitudo lebih kecil dan penurunan yang lebih lambat dibandingkan prey.
2. **Grafik $c = 0.2$:**
   - Pada grafik ini, dilakukan upaya penanggulangan pada predator dengan laju 0.2.
   - Populasi prey menunjukkan pola fluktuasi yang lebih jelas, dengan beberapa puncak dan lembah.
   - Populasi predator juga berfluktuasi mengikuti pola yang terjadi pada prey.
3. **Grafik $c = 0.8$:**
   - Pada grafik ini, laju penanggulangan keberadaan predator ditingkatkan menjadi 0.8.
   - Populasi prey menunjukkan fluktuasi yang lebih ekstrem dengan beberapa siklus populasi yang sangat tinggi diikuti oleh penurunan tajam. Dari grafik dapat terlihat bahwa jumlah prey meningkat hingga lebih dari 250 ekor dan saat terjadi penurunan, jumlahnya tidak pernah kurang dari nilai awal yang diberikan.
   - Populasi predator mengikuti pola yang sama, menunjukkan bahwa populasi predator dipengaruhi oleh populasi prey.

Secara keseluruhan, grafik-grafik ini menunjukkan bagaimana perubahan parameter c mempengaruhi dinamika populasi dua spesies. Peningkatan nilai c berpengaruh signifikan terhadap peningkatan jumlah prey.

5. KESIMPULAN

Adapun kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis adalah:

1. Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari model yaitu $(0,0)$ dan $\left(\frac{m+c}{a}, \frac{r}{a}\right)$
2. Hubungan antara predator dengan prey adalah jika populasi prey meningkat maka populasi predator juga akan meningkat mengikuti populasi prey, begitupula sebaliknya. Hasil simulasi numerik juga menunjukkan bagaimana perubahan parameter c mempengaruhi dinamika populasi dua spesies. Dengan meningkatnya nilai c menyebabkan fluktuasi yang lebih signifikan dalam populasi kedua spesies dan berpengaruh terhadap peningkatan jumlah prey. Siklus ini kemudian berulang seiring berjalanannya waktu.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] E. W. Kopf and A. J. Lotka, "Elements of Physical Biology," *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 20, no. 151, p. 452, 1925, doi: 10.2307/2965538.

[2] F. Y. Rumlawang and T. Sampeliling, "Model Dinamik Interaksi Dua Populasi," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 5, no. 1, pp. 9–13, 2011, doi: 10.30598/barekengvol5iss1pp9-13.

[3] S. B. Waluya, *Buku Ajar Persamaan Diferensial*, no. l. Semarang: Universitas Negeri Semarang, 2006.

[4] R. Rahardi, "Model Kompetisi Dua Spesies," *Inov. (Jurnal Humaniora, Sains dan Pengajaran)*, vol. XVIII, no. 0, pp. 1–23, 2010.

[5] C. S. Holling, "The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European Pine Sawfly1," *Can. Entomol.*, vol. 91, no. 5, pp. 293–320, 1959, doi: 10.4039/Ent91293-5.

[6] R. Haberman, *Mathematical models mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow : an introduction to applied mathematics*, Classics i. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

[7] D. Purnamasari, Faisal, and A. J. Noor, "Kestabilan Sistem Predator-Prey Leslie," *Epsil. J. Mat. Murni dan Terap.*, vol. 3, no. 2, pp. 51–59, 2009, doi: 10.20527/epsilon.v3i2.43.

[8] N. Hasan, R. Resmawan, and E. Rahmi, "Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Predator," *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 16, no. 2, pp. 121–142, 2020, doi: 10.20956/jmsk.v16i2.7317.

[9] H. Pathuddin, "Analisis Kestabilan Model Predator Prey pada Tanaman Bambu dan Giant Panda," *J. MSA (Matematika dan Stat. serta Apl.*, vol. 8, no. 2, pp. 36–41, 2020, doi: 10.24252/msa.v8i2.14546.