EKSISTENSI TITIK TETAP DARI SUATU TRANSFORMASI LINIER PADA RUANG BANACH

Nur Aeni
Program Studi Matematika-Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, nuraeniayatullah@gmail.com

ABSTRAK, Titik tetap adalah titik yang dipetakan terhadap dirinya sendiri terhadap suatu fungsi atau transformasi. Jelas bahwa setiap transformasi identitas memiliki titik tetap, namun demikian beberapa transformasi non identitas juga memiliki titik tetap. Tujuan penelitian ini adalah Menentukan syarat adanya titik tetap x dari suatu pemetaan linier. Berdasarkan tujuan penelitian maka diperoleh misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan. Bila T^m suatu pemetaan kontraksi pada X untuk suatu m, maka T mempunyai titik tetap. Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan sehingga $\forall\, x \in X$ berlaku: $\|Tx - Ty\|_y \leq \gamma\{\|x - Tx\|_x + \|y - Ty\|_x\}$ dengan $0 \leq \gamma <$ ½ Maka T mempunyai titik tetap.

Kata Kunci*: Titik Tetap, Ruang Vektor, Transformasi, dan Ruang Banach*

1. PENDAHULUAN

Titik tetap adalah titik yang dipetakan terhadap dirinya sendiri terhadap suatu fungsi atau transformasi. Jelas bahwa setiap transformasi identitas memiliki titik tetap, namun demikian beberapa transformasi non identitas juga memiliki titik tetap. Tujuan penelitian ini adalah Menentukan syarat adanya titik tetap x dari suatu pemetaan linier. Dalam penelitian ini akan dikaji eksistensi (ada-tidaknya) titik tetap dari suatu transformasi linier pada Ruang Banach. Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan. Bila T^m suatu pemetaan kontraksi pada X untuk suatu m, maka T mempunyai titik tetap. Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik mengkaji " Eksistensi Titik Tetap dari Suatu Transformasi Linier pada Ruang Banach"..

2. TINJAUAN PUSTAKA

RUANG BANACH

Ruang Banach merupakan ruang vektor bernorma.

Ruang Vektor

Suatu himpunan menjadi ruang vektor jika himpunan tersebut dilengkapi dengan dua operasi yaitu operasi tambah dan operasi kurang perkalian "skalar" dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Himpunan ini juga harus tertutup terhadap kedua operasi ini artinya jika V suatu himpunan sebarang dan $\mathcal{R}$ suatu himpunan skalar maka kedua operasi tersebut harus memenuhi definisi berikut:

Definisi 2.1 (Berberian, 1961 : 3)

Ruang vektor V atas $\mathcal{R}$ adalah himpunan obyek-obyek x, y, z, ... disebut vektor. Vektor nol dinotasikan dengan θ, untuk setiap vektor x, negatif dari x dinotasikan dengan –x. Aksioma-aksioma berikut diasumsikan berlaku:

(A) Untuk setiap pasangan vektor x, y di V terdapa vektor yang disebut "jumlah x dan y", dinotasikan x + y di V, dan berlaku:
- (A1) x + y = y + x untuk setiap x, y ϵ V
- (A2) x + (y + z) = (x + y) + z untuk setiap x, y, z ϵ V
- (A3) Terdapat dengan tunggal θ ϵ V sedemikian sehingga x + θ = x untuk setiap x ϵ V
- (A4) Untuk setiap x ϵ V, terdapat dengan tunggal –x ϵ V yang disebut negatif x sedemikian sehingga x + (-x) = θ

(M) Untuk setiap skalar λ dan setiap vektor x di V, terdapat vektor disebut "hasil kali x dengan λ", dinotasikan dengan λx di V, dan berlaku:
- (M1) λ (x + y) = λx + λy, untuk setiap x, y ϵ V dan λ adalah skalar
- (M2) (λ + μ) x = λx + μx, untuk setiap x ϵ V dan λ, μ adalah skalar
- (M3) ($\lambda\mu$) x = λ(μx), untuk setiap x ϵ V dan λ, μ adalah skalar
- (M4) 1 . x = x untuk setiap x ϵ V

Sebagai catatan x + (-y) biasa ditulis dengan x – y.

Teorema 2. 2 (Berberian, 1961: 6)

Untuk sebarang ruang vektor:

(i) Persamaan vektor x + y = z mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian x
(ii) Jika z + z = z maka z = θ
(iii) $\lambda\theta = \theta$ untuk setiap skalar λ
(iv) 0x = θ untuk setiap vektor x
(v) Jika $\lambda x = \theta$ maka $\lambda = 0$ atau x = θ

Bukti:

(i) Jika y, z adalah vektor maka x = z + (-y) adalah penyelesaian dari x + y = z, sebab x + y = [z + (-y)] + y = z +[(-y) + y] = z + θ. Selanjutnya jika x_1 dan x_2 penyelesaian dari x + y = z maka x_1 + y = z = x_2 + y. Diperoleh (x_1 + y) + (-y) = (x_2 + y) + (-y), x_1 + [y + (-y)] = x_2 + [y + (-y)], x_1 + θ = x_2 + θ, x_1 + x_2. Jadi persamaan x + y = z mempunyai tepat satu penyelesaian.
(ii) θ adalah penyelesaian dari z + z = z sebab θ + z = z. Berdasarkan (i) z = θ adalah satu-satunya penyelesaian dari z + z = z.
(iii) $\lambda\theta = \lambda(\theta + \theta) = \lambda\theta + \lambda\theta$. berdasarkan (ii), $\lambda\theta = \theta$.
(iv) 0x = (0 + 0)x = 0x + 0x . berdasarkan (ii), 0x = θ.
(v) Diberikan $\lambda x = \theta$.

Jika $\lambda = 0$ maka bukti selesai.

Jika $\lambda \neq 0$ maka terdapat $\frac{1}{\lambda}$ sehingga $\lambda.\frac{1}{\lambda} = 1$.

Jadi,

$$\frac{1}{\lambda}.\lambda x = \left(\frac{1}{\lambda}\right).\theta, \left(\frac{1}{\lambda}.\lambda\right)x = \left(\frac{1}{\lambda}\right).\theta, 1.x = \theta, x = \theta$$

Akibat 2.3 (Berberian, 1961: 7)

Untuk sebarang ruang vektor V berlaku:

(i) (-λ)x = $\lambda(-x)$ = -(λx)
(ii) λ(x – y) = λx – λy
(iii) ($\lambda - \mu$)x = λx – μx

Bukti:

(i) θ = 0x = $(\lambda + (-\lambda))$x = λx + $(-\lambda)$x.
Jadi (-λ)x = -(λx).
Dengan cara serupa,
$\theta = \lambda\theta = \lambda(x + (-x))$,
$\theta = \lambda x + \lambda(-x)$.
Jadi $\lambda(-x) = -(\lambda x)$
(ii) Untuk setiap $\lambda \in \mathcal{R}$, x, y ∈ V.
Akan ditunjukkan bahwa
λ(x – y) = λx – λy
λ(x – y) = λ(x + (-y)) menurut (M2)
= λx +λ (-y)
Menurut (i), λ(– y) = – λy
Jadi λ(x – y) = λx + (– λy)
= λx - λy
(iii) Untuk setiap $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$, x ∈ V. Akan ditunjukkan bahwa
($\lambda - \mu$)x = λx – μx.
($\lambda - \mu$)x = (λ +(- μ))x
= λx + (– μ)x menurut (M2)
Menurut (i) (– μ)x = – (μx), jadi
($\lambda - \mu$)x = λx + (–(μx))
= λx – μx

Ruang Vektor Bernorma

Pada ruang vektor dapat didefinisikan kuantitas suatu vektor dan jarak antara dua vektor, kuantitas dan jarak inilah yang disebut norma dari suatu ruang vektor atau norma selisih dua vektor. Pengertian norma dan suatu ruang vektor akan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.4 (Nababan, 1992 : 13)

Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathcal{R}$. Suatu pemetaan $\|.\|: V \to R$ disebut norma dari V, jika kondisi berikut dipenuhi:

a. $\|x\| \geq 0, \forall\, x \in V$
b. Jika x $\in V$, $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika x = θ
c. $\|ax\| = |a|\|x\|$, untuk semua x $\in V$ dan $a \in \mathcal{R}$
d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk semua x, y $\in V$

Catatan:

1. Pasangan (V, $\|.\|$) disebut ruang vektor bernorma dan $\|x\|$ disebut norma dari x.
2. Jarak antara vektor x dan y, ditulis $\|x - y\|$ atau $\|y - x\|$.

Pengertian Ruang Banach

Definisi 2.5 (Nababan, 1992 : 13)

Ruang vektor V dikatakan “bernorma” jika terdapat fungsi bernilai riil pada $\|.\|: V \to R$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\|a\| \geq 0$ untuk setiap a $\in$ V
   $\|a\| = 0$ jika dan hanya jika a = θ

2. $\|\alpha a\| = |\alpha|\|a\|$ untuk setiap α ϵ R, a ϵ V
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ untuk setiap a, b ϵ V

Jika V ruang vektor bernorma, notasi yang biasa digunakan adalah (V, $\|.\|$).

Definisi 2.6 (berberian, 1961 : 97)

Ruang Banach adalah ruang vektor bernorma yang lengkap.

TRANSFORMASI LINIER

Transformasi linear merupakan fungsi linier antar ruang vektor.

Definisi 2.7

T : V → W disebut transformasi linear jika:

(i). T(x + y) = T(x) + T(y) untuk semua vektor x dan y di V

(ii). T(kx) = k T(x) untuk semua vektor x dan V dan semua skalar k.

Definisi 2.8 (Nababan, 1992 : 15)

Misalkan X dan Y dua ruang Banach atas K.

Transformasi T : X → Y dikatakan linier jika untuk setiap α, β, ϵ K dan x, y ϵ X berlaku T (α.x + β.y) = α. T(x) + β. T(y)

Transformasi linier jika dari ruang Banach X ke himpunan skalar K disebut fungsional linier pada X.

Jika f funsional linier pada X ke K, maka

f (α.x + β.y) = α. f (x) + β. f(y), ∀ x, y ϵ X dan ∀ α, β, ϵ K

jika T : X → Y linier maka

T (0) = 0 dan T (-x) = -T(x), sebab

T (0) = T (x – x) = T (x) – T(x) = 0 dan

T (-x) = T (0 – x) = T(0) – T (-x) = 0 – T (-x) = -T(x)

Definisi 2.9 (Nababan, 1992 : 11)

Suatu transformasi T : V → W dari suatu ruang Banach (V, $\|.\|_v$) ke ruang Banach (W, $\|.\|_w$) dikatakan kontinu di x0, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga setiap x ϵ V dengan $\|x - x_0\|_v < \delta$ berlaku $\|T(x) - T(x_0)\|_w < \varepsilon$. Transformasi T dikatakan kontinu di setiap titik pada V.

3. METODOLOGI

Penelitian ini merupakan penelitian kajian pustaka yang mengumpulkan literatur-literatur di perpustakaan, kemudian mempelajari, membahas adanya titik tetap yang bergantung pada lengkap tidaknya ruang Banch tersebut, pendefinisian transformasi linearnya dan membuktikan teorema-teorema, menyangkut barisan vektor di dalam ruang Banach.

Kajian pustaka dikembangkan dengan mengkaji hasil-hasil penelitian yang berkaitan dengan permasalahan yang akan dipecahkan dengan menggunakan ruang vektor dan teorema-teorema sederhana, transformasi linear dan ruang Banach.

4. PEMBAHASAN

Titik tetap adalah titik yang dipetakan terhadap dirinya sendiri terhadap suatu fungsi atau transformasi. Jelas bahwa setiap transformasi identitas memiliki titik tetap, namun demikian beberapa transformasi non identitas juga memiliki titik tetap. Berkaitan dengan pembahasan selanjutnya, berikut akan diuraikan pengertian dan beberapa teorema-teorema penting mengenai eksistensi titik tetap dari suatu transformasi linier pada ruang Banach.

Definisi 3.1. Prinsip Kontraksi Banach 1 (Nababan, 1992: 19)

Misalkan X = (X, $\|.\|$) ruang Banach. Suatu pemetaan T : X → X dinamakan kontraksi pada X jika ada bilangan positif α < 1 sehingga untuk setiap x, y ϵ X berlaku $\|T_x - T_y\| \leq \alpha \|x - y\|$.

Penulisan Tx sering ditulis T(x) dan selanjutnya didefinisikan:

T2 (x) = T(Tx)

T3 (x) = T(T2x) = T (T(Tx))

.

.

.

Tn (x) = T(Tn-1x)

Teorema 3.2 (Nababan, 1992: 21)

Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan. Bila T^m suatu pemetaan kontraksi pada X untuk suatu m, maka T mempunyai titik tetap.

Bukti:

Misalkan B = T^m suatu kontraksi pada X. Pemetaan B mempunyai titik tetap tunggal namakan ẍ. Jadi B ẍ = ẍ, karena itu B^n ẍ = ẍ, selanjutnya klaim:

$\lim_{n\to\infty} B^n x = ẍ, \forall\, x \in X$

Untuk membuktikan hal ini, definisikan barisan (X_n) sebagai berikut:

$x_0 = x$

$x_1 = Bx_0$

$x_2 = Bx_1 = B^2x_0$

$x_n = Bx_{n-1} = B^n x_0$

bila T dengan B, maka dapat disimpulkan bahwa,

$\exists\, y \in X \ni \lim_{n\to\infty}(x_n) = y$ atau

$\lim_{n\to\infty} B^n x_0 = \lim_{n\to\infty} B^n x = y$

y ini tidak lain adalah titik tetap dari B, karena titik tetap itu tunggal maka haruslah y = ẍ. Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan,

$\forall\, x \in X, \lim_{n\to\infty} B^n x = ẍ.$

$jadi\ ẍ = \lim_{n\to\infty} T^{mn}.Tẍ$

$= \lim_{n\to\infty} T^{mn+1}\, ẍ = \lim_{n\to\infty} T(T^{m.n})\, ẍ$

$= \lim_{n\to\infty} TB^n\, ẍ$

$= \lim_{n\to\infty} Tẍ$

= T ẍ

Jadi ẍ merupakan titik tetap dari T, karena setiap titik tetap dari T juga titik tetap dari B. Jadi T tidak mempunyai lebih dari satu titik tetap.

Teorema 3.3 (Nababan, 1992: 27)

Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan sehingga $\forall\, x \in X$ berlaku:

$\|Tx - Ty\|_y \le \gamma\{\|x - Tx\|_x + \|y - Ty\|_x\}$

dengan $0 \le \gamma < ½$

Maka T mempunyai titik tetap.

Bukti:

Dengan mengambil $\alpha = \beta = \delta = 0$, maka diperoleh

$\|Tx - Ty\|_y \le \beta\{\|x - Tx\|_x + \|y - Ty\|_x\},$

$\forall\, x, y \in X$

Sekarang diperhatikan bahwa $0 \le \gamma < ½$ karena $\alpha = \beta = \delta = 0$ maka syarat

$0 \le \frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\beta-\gamma} < 1$ menjadi

$0 \le \frac{\gamma}{1-\gamma} < 1,$

syarat $\beta + \gamma < 1$ menjadi

$\gamma < 1$ dan

syarat $2\gamma + \delta < 1$ menjadi

$2\gamma < 1\ atau\ \gamma < 1/2$

Ketiga syarat memberikan $0 \le \gamma < ½$. Maka T merupakan titik tetap.

Teorema 3.4 (Nababan, 1992: 28)

Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan sehingga $\forall\, x, y \in X$ berlaku:

$\|Tx - Ty\|_y \le \left\{\frac{\|x-Tx\|_x\|y-Ty\|_x}{\|x-y\|_x}\right\} + \delta\|x - y\|,$

dimana $\alpha, \delta \in (0,1)$ dengan $\alpha + \beta < 1$.

Maka T mempunyai titik tetap.

Bukti:

Dengan mengambil $\beta + \gamma = 0$ maka diperoleh:

$\|Tx - Ty\|_y \le \left\{\frac{\|x-Tx\|_x\|y-Ty\|_x}{\|x-y\|_x}\right\} + \delta\|x - y\|, \forall\, x, y \in X$

Sekarang akan diperhatikan $\alpha + \delta < 1$, dengan $\alpha, \beta \in (0,1)$ karena $\beta + \gamma = 0$ maka syarat $0 \le \frac{\beta+\gamma+\delta}{1-\alpha-\beta-\gamma} < 1$ menjadi $0 \le \frac{\delta}{1-\alpha} < 1$ dan syarat $2\gamma + \delta < 1$ menjadi $\delta < 1$ dari $0 \le \frac{\delta}{1-\alpha} < 1$ dan $\alpha \in (0,1)$ diperoleh $\delta < 1 - \alpha$ maka $\alpha + \delta < 1$.

Maka T mempunyai titik tetap..

5. KESIMPULAN

Jika X = (X, $\|.\|$) ruang Banach. Suatu pemetaan T : X → X dinamakan kontraksi pada X jika ada bilangan positif α < 1 sehingga untuk setiap x, y ϵ X berlaku $\|T_x - T_y\| \le \alpha\,\|x - y\|$. Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan. Bila T^m suatu pemetaan kontraksi pada X untuk suatu m, maka T mempunyai titik tetap.

Misalkan (X, $\|.\|$) ruang Banach lengkap dan T : X → X suatu pemetaan sehingga $\forall\, x \in X$ berlaku:

$\|Tx - Ty\|_y \le \gamma\{\|x - Tx\|_x + \|y - Ty\|_x\}$

dengan $0 \le \gamma < ½$.

Maka T mempunyai titik tetap.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Berberian, K. S. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxpord University Press, New York
[2] Dwijanto, E . 1994. *Analisis Real*. Ikip Semarang Press, Semarang
[3] Kreyzeg, E. 1978. Introduction Funcional Analysis with Application. Kanada: John Wiley & Sons.
[4] Nababan, T. P. 1992. Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik dan Aplikasinya. Institut Teknologi Bandung, Bandung.