REPRESENTASE QUATERNION DENGAN MENGGUNAKAN NOTASI $\mathbb{C}_j - pair$

Muh. Irwan[i]

Erniwati Jalil[ii]

[i] Prodi Matematika FST, UINAM, muhirwan @uin-alauddin.ac.id
[ii] Prodi Matematika, Fakultas MIPA, UMMA, erniwatijalil@gmail.com

ABSTRAK,*Quaternion merupakan perluasan bilangan kompleks dalam empat dimensi (4D). dalam melakukan representasi bilangan quaternion terdapat beberapa cara yang bisa digunakan, seperti bentuk polar (Polar Form),The Cayley-Dickson, The ortho-split dan notasi* $\mathbb{C}_j - Pair$. *Pada artikel ini digunakan notasi* $\mathbb{C}_j - Pair$*untuk merepresentasikan quaternion serta memperlihatkan kasus khusus* $\mathbb{C}_j - Pair$ *dalam aplikasinya pada perkalian bikompleks quaternion.*

Kata Kunci:*Quaternion, Representasi Quaternion,* $\mathbb{C}_j - Pair$, *Bicomplex Product Quaternion*

1. PENDAHULUAN

Bilangan quaternion merupakan pengembangan bilangan kompleks. Yang menarik untuk diperhatikan bahwa pada bilangan quaternion tidak berlaku sifat komutatif terhadap operasi perkalian. Bilangan quaternion pertama kali diperkenalkan oleh Sir Rowman Hamilton padatahun 1805-1865. [5][6][7].

Representasi bilangan quaternion menjadi suatu yang unik untuk dikaji. Beberapa cara yang bisa digunakan untuk melakukan representasi quaternion diataranya, dekomposisi quaternion, bentuk polar quaternion, *CD form, Carley-Dickson*, Ortho-Splitdan$\mathbb{C}_j - Pair$.

Pada artikel ini, akan dibahas tentang$\mathbb{C}_j - Pair$ hal ini karena pada notasi $\mathbb{C}_j - Pair$ berlaku sifat komutatif perkalian. Sedangkan pada bilangan quaternion sendiri tidak berlaku sifat komutatif perkalian. Adanya kontrakdiksi tersebut, sehingga pada artikel ini akan diperlihatkan beberapa teknik modifikasi secara aljabar sehingga kondisi perkalian dua bilangan quaternion dapat memenuhi sifat komutatif.

2. TINJAUANPUSTAKA

Bilangan Quaternion

Himpunan bilangan quaternion dituliskan dengan simbol $\mathbb{H}$ sebagai penghargaan bagi Sir William Roman Hamilton, dimana elemen-elemen dari bilangan quaternion merupakan kombinasi linear dari bilangan skalar riil dan tiga bagian imajiner $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{k}$yang dituliskan sebagai [1,2,3],

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 | q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}. \quad (1)$$

Jika q_2 dan q_3 bernilai nol maka persamaan (1) merupakan suatu bilangan kompleks. Sedangkan jika $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$, maka persamaan(1) merupakan elemen identitas penjumlahan quaternion. Jika $q_0 = 1, q_1 = q_2 = q_3 = 0$ maka persamaan(1) disebut elemen identitas perkalian quaternion (J.P. Morais, dkk. 2012). Selanjutnya, persamaan (1) dapat dituliskan menjadi

$$q = Sc(q) + \boldsymbol{q}, \quad (2)$$

Dalam hal ini$Sc(q) = q_0$ adalah bagian skalar dari$q$, dan $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ sebagai bagian vektor (*vector part*) dari q [6]. Perkalian elemen-elemen dari suatu bilangan quaternion berdasarkan aturan Hamilton dapat dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1.$$

$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}.$$

Dapat diperhatikan bahwa operasi penjumlahan dan pengurangan quaternion dilakukan seperti pada operasi penjumlahan dan pengurangan suku banyak. Jika$p, q \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ dan $q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ maka

$$p + q = (p_0 + q_0) + \boldsymbol{i}(p_1 + q_1) + \boldsymbol{j}(p_2 + q_2) + \boldsymbol{k}(p_3 + q_3). \quad (3)$$

Dengan cara yang sama, operasi pengurangan pada bilangan quaternion

$$p - q = (p_0 - q_0) + \boldsymbol{i}(p_1 - q_1) + \boldsymbol{j}(p_2 - q_2) + \boldsymbol{k}(p_3 - q_3). \quad (4)$$

Selanjutnya,operasi perkalian p dan q dilakukan berdasarkan perkalian polinom yaitu

$$pq = (p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3)(q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3)$$
$$= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(\boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3) + q_0(\boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3) + \boldsymbol{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \boldsymbol{j}(p_1q_3 - p_3q_1) + \boldsymbol{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$$
$$= p_0q_0 - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} + p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} \qquad (5)$$

dimana $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} = (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)$ adalah hasil kali titik (dot product) dan $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \boldsymbol{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \boldsymbol{j}(p_1q_3 - p_3q_1) + \boldsymbol{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$. Hasil perkalian pq dengan qp tidak selalu sama, ini karena perkalian silang dari $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ tidak komutatif. Sehingga dapat dikatakan bahwa $pq = qp$ jika dan hanya jika $p_0 = q_0$ dan $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$.

Definisi 2.1. Untuk sebarang$p \in \mathbb{H}$ dengan $p = p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3$ dimana $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, konjugasi dari p adalah

$$\overline{p} = \overline{p_0 + \boldsymbol{i}p_1 + \boldsymbol{j}p_2 + \boldsymbol{k}p_3}$$
$$= p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3. \qquad (6)$$

Berdasarkan persamaan (7) dapat dipahami bahwa konjugasi dari p merupakan perubahan tanda pada bagian imajiner sedangkan bagian riil tidak berubah tanda. Hasil perkalian konjugasi quaternion adalah suatu anti-involusi, hal ini dapat ditunjukkan bahwa

$$\overline{pq} = \bar{q}\overline{p},)$$

yaitu

$$\bar{q}\bar{p} = (q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3)(p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3)$$
$$= q_0(p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3) - \boldsymbol{i}q_1(p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3) - \boldsymbol{j}q_2(p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3) - \boldsymbol{k}q_3(p_0 - \boldsymbol{i}p_1 - \boldsymbol{j}p_2 - \boldsymbol{k}p_3)$$
$$= p_0q_0 - \boldsymbol{p}.\boldsymbol{q} - q_0\boldsymbol{p} - p_0\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}. \qquad (7)$$

Dan modulo p dituliskan dengan |p| dan didefinisikan sebagai

$$|p| = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \qquad (8)$$

Dekomposisi quaternion

Misalkan$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3$, maka q dapat didekomposisi menjadi $q = q_+ + q_- = \frac{1}{2}(q + \boldsymbol{i}q\boldsymbol{j}) + \frac{1}{2}(q - \boldsymbol{i}q\boldsymbol{j})$, dari dekomposisi ini sehingga

$$q_{\pm} = \{q_0 \pm q_3 + \boldsymbol{i}(q_1 \mp q_2)\} \frac{1 \pm \boldsymbol{k}}{2}). \qquad (9)$$

3. METODOLOGI

Penulisan artikel ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut,

a. Merumuskan notasi $\mathbb{C}_j - Pair$
b. Menguraikan operasi aritmetika quaternion dengan menggunakan notasi $\mathbb{C}_j - Pair$
c. Menguraikan aturan perkalian bikompleks quaternion
d. Merumuskan beberapa sifat perkalian bicompleks quaternion

4. PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan dijelaskan lebih jauh mengenai operasi dasar bilangan quaternion. Diberikan quaternion

$$q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 \in \mathbb{H} \qquad (10)$$

Definisi 1.

Misalkan q dituliskan dalam bentuk $q = u + \boldsymbol{i}v$, dimana $u = q_0 + \boldsymbol{j}q_2$ dan $v = q_1 + \boldsymbol{j}q_3 \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$. Quaternion q dipahami sebagai bentuk pasangan bilangan kompleks dengan ordinat $\boldsymbol{j}$. Dan bentuk ini disebut sebagai $\mathbb{C}_j - Pair$. Berikut ini diperlihatkan bahwa notasi $\mathbb{C}_j - Pair$ merupakan bentuk lain dari quaternion q [7]. Dengan memperhatikan bahwa,

$$q = u + \boldsymbol{i}v. \qquad (11)$$

Dengan mensubstitusikan nilai u dan v. Maka quaternion q menjadi

$$q = q_0 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)$$
$$= q_0 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{ij}q_3$$
$$= q_0 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{k}q_3.$$

Quaternion q dapat disebut sebagai pasangan terurut dari u dan v atau dituliskan dengan (u, v). Pada bilangan kompleks u dan v berturut-turut disebut sebagai bagian real dan bagian imajiner. Tentunya untuk quaternion, quaternion q dapat juga disebut sebagai representasi bialngan kompleks. Namun perlu sangat hati-hati untuk mengatakan hal tersebut karena pada hakikatnya u mengandung q_0 dan q_2 sedangkan v mengandung q_1 dan q_3. Untuk lebih menyederhanakan penulisan quaternion, selanjutnya akan digunakan q sebagai representasi (u, v).

Lebih jauh, akan dibahas notasi $\mathbb{C}_j - Pair$ hubungannya dengan aljabar quaterion.

Penjumlahan

Teorema 1

Misalkan $q = (u, v),\ p = (w, x) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ dengan $u = q_0 + \boldsymbol{j}q_2,\ v = q_1 + \boldsymbol{j}q_3,\ w = p_0 + \boldsymbol{j}p_2, x = p_1 + \boldsymbol{j}p_3$.
Maka

$$q + p = \big((u + w), (v + x)\big) \quad (12)$$

Bukti

Dengan menggunakan definisi $C_j - pair$ teorema 1 dibuktikan dengan cara sebagai berikut,

$$\begin{aligned} q + p &= (u, v) + (w, x) \\ &= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big) + \\ &\quad \big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + (p_0 + \boldsymbol{j}p_2)\big) + \\ &\quad \boldsymbol{i}\big((q_1 + \boldsymbol{j}q_3) + (p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &= \big((u + w), (v + x)\big) \end{aligned}$$

Pengurangan

Teorema 2

Misalkan $q = (u, v),\ p = (w, x) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ dengan $u = q_0 + \boldsymbol{j}q_2,\ v = q_1 + \boldsymbol{j}q_3,\ w = p_0 + \boldsymbol{j}p_2, x = p_1 + \boldsymbol{j}p_3$.
Maka

$$q - p = \big((u - w), (v - x)\big) \quad (13)$$

Bukti

$$\begin{aligned} q - p &= (u, v) - (w, x) \\ &= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big) - \\ &\quad \big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) + \\ &= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) - (p_0 + \boldsymbol{j}p_2)\big) + \\ &\quad \boldsymbol{i}\big((q_1 + \boldsymbol{j}q_3) - (p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &= \big((u - w), (v - x)\big) \end{aligned}$$

Pembuktian teorema 2 dibuktikan dengan menggunakan definisi notasi $C_{\boldsymbol{j}} - Pair$ dan sifat assosiatif bilangan quaternion.

Konjugasi

Teorema 3

Misalkan $q = (u, v),\ p = (w, x) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ dengan $u = q_0 + \boldsymbol{j}q_2, v = q_1 + \boldsymbol{j}q_3$ maka

$$\bar{q} = (u^\star, -v) \quad (14)$$

Bukti.

$$\begin{aligned} \bar{q} &= q_0 - \boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{j}q_2 - \boldsymbol{k}q_3 \\ &= q_0 - \boldsymbol{j}q_2 + (-\boldsymbol{i}q_1 - \boldsymbol{k}q_3) \\ &= q_0 - \boldsymbol{j}q_2 + (-(\boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{ij}q_3) \\ &= q_0 - \boldsymbol{j}q_2 + (-\boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3) \\ &= (q_0 - \boldsymbol{j}q_2) - (\boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3) \\ &= (u^\star, -v). \end{aligned}$$

Dimana $\star$ adalah konjugasi klasik bilangan kompleks.

Perkalian

Misalkan $q = (u_1, v_1),\quad p = (u_2, v_2) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ dengan $u_1 = q_0 + \boldsymbol{j}q_2,\ v_1 = q_1 + \boldsymbol{j}q_3,\ u_2 = p_0 + \boldsymbol{j}p_2, v_2 = p_1 + \boldsymbol{j}p_3$. Maka

$$qp = (u_1u_2 - v_1^\star\, v_2, u_1^\star v_2 + v_1u_2) \quad (15)$$

Bukti.

$$\begin{aligned} qp &= (u_1, v_1)(u_2, v_2) \\ &= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big) \\ &\quad \big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)\big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\ &= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad + (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)\, \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\, \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_0 - \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad + \boldsymbol{ii}(q_1 - \boldsymbol{j}q_3)\,(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad - (q_1 - \boldsymbol{j}q_3)\,(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_0 - \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &= \{(q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\ &\quad - (q_1 - \boldsymbol{j}q_3)\,(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\} \\ &\quad + \boldsymbol{i}\{(q_0 - \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\ &\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2)\} \\ &= (u_1u_2 - v_1^\star\, v_2, u_1^\star v_2 + v_1u_2) \end{aligned}$$

Perkalian Bikompleks Quaternion

Seperti dijelaskan sebelumnya, bahwa perkalian bikompleks quaternion merupakan kasus khusus dalam perkalian quaternion, hal ini dikarenakan pada kasus perkalian bikompleks quaternion berlaku sifat komutatif. Untuk menyatakan perkalian bikompleks quaternion, digunakan simbol "$\otimes$". Sebelum melakukan perkalian bikompleks quaternion, maka terlebih dahulu, didefinisikan beberapa aturan perkalian berikut,

$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k},$

$\boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$,
$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{j}$,
$\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \otimes \boldsymbol{j} = -\mathbf{1}$,
$\boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{k} = \mathbf{1}$. (16)

Selanjutnya, akan digunakan sifat-sifat tersebut untuk membuktikan beberapa teorema berikut.

Teorema 4.
Misalkan $q = (u_1, v_1)$, $p = (u_2, v_2) \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ dengan $u_1 = q_0 + \boldsymbol{j}q_2$, $v_1 = q_1 + \boldsymbol{j}q_3$, $u_2 = p_0 + \boldsymbol{j}p_2, v_2 = p_1 + \boldsymbol{j}p_3$. Maka

$$p \otimes q = (u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + v_1 u_2) \quad (17)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
q \otimes p &= (u_1, v_1)(u_2, v_2) \\
&= \big((q_0 + \boldsymbol{j}q_2) + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big) \\
&\quad \big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\
&= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)\big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\big((p_0 + \boldsymbol{j}p_2) + \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3)\big) \\
&= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad + (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)\, \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\, \boldsymbol{i}(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad + \boldsymbol{i}\boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\, (p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&= (q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad - (q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\, (p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&= ((q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2) \\
&\quad - (q_1 + \boldsymbol{j}q_3)\, (p_1 + \boldsymbol{j}p_3)) \\
&\quad + \boldsymbol{i}((q_0 + \boldsymbol{j}q_2)(p_1 + \boldsymbol{j}p_3) \\
&\quad + (q_1 + \boldsymbol{j}q_3)(p_0 + \boldsymbol{j}p_2)) \\
&= (u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + v_1 u_2)
\end{aligned}$$

Langkah awal pembuktian dilakukan dengan menggunakan definisi $C_{\boldsymbol{j}} - Pair$. Selanjutnya, langkah 2, 3, 4, 5 dan 6 digunakan sifat komutatif, asosiatif dan distributf perkalian.

Dengan cara yang sama, akan dengan mudah diperlihatkan bahwa, $q \otimes p = p \otimes q$.

Teorema 5.
Misalkan, diberikan $q = (q_1, q_2) = (a + \boldsymbol{j}c, b + \boldsymbol{j}d)$, untuk sebarang $\mathbb{C}_{\boldsymbol{i}}$ bilangan $z = \mathcal{R}(z) + \boldsymbol{i}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) = \big(\mathcal{R}(z), \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z)\big)$, maka

$$\begin{aligned}
&q \otimes z \\
&= \Big(q_1\mathcal{R}(z) - q_2\, \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z), \big(q_1\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) + q_2\mathcal{R}(z)\big)\Big)
\end{aligned} \quad (18)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
q \otimes z &= (a + \boldsymbol{j}c, b + \boldsymbol{j}d) \otimes \big(\mathcal{R}(z), \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z)\big), \\
&= \big((a + \boldsymbol{j}c) + \boldsymbol{i}(\, b + \boldsymbol{j}d)\big)\big(\mathcal{R}(z) + \boldsymbol{i}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z)\big) \\
&= (a + \boldsymbol{j}c)\mathcal{R}(z) + (a + \boldsymbol{j}c)\boldsymbol{i}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) \\
&\quad + \boldsymbol{i}(\, b + \boldsymbol{j}d)\mathcal{R}(z) + \boldsymbol{i}(\, b + \boldsymbol{j}d)\, \boldsymbol{i}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) \\
&= (a + \boldsymbol{j}c)\mathcal{R}(z) - (\, b + \boldsymbol{j}d)\, \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) \\
&\quad + (a + \boldsymbol{j}c)\boldsymbol{i}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) + \boldsymbol{i}(\, b + \boldsymbol{j}d)\mathcal{R}(z) \\
&= (a + \boldsymbol{j}c)\mathcal{R}(z) - (\, b + \boldsymbol{j}d)\, \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) \\
&\quad + \boldsymbol{i}\big((a + \boldsymbol{j}c)\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) + (\, b + \boldsymbol{j}d)\mathcal{R}(z)\big) \\
&= q_1\mathcal{R}(z) - q_2\, \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) \\
&\quad + \boldsymbol{i}\big(q_1\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) + q_2\mathcal{R}(z)\big) \\
&= \Big(q_1\mathcal{R}(z) - q_2\, \mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z), \big(q_1\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(z) + q_2\mathcal{R}(z)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Teorema 5, dibuktikan dengan menggunakan definisi $C_{\boldsymbol{j}} - Pair$, karena $\boldsymbol{i} \otimes \boldsymbol{i} = -1$ dihasilkan langkah ke-3. Selanjutnya, langkah ke-3, 4, 5 digunakan sifat asosiatif dan komutatif perkalian.

Teorema 6.
Misalkan, diberikan $q = (q_1, q_2) = (a + \boldsymbol{j}c, b + \boldsymbol{j}d)$, untuk sebarang $\mathbb{C}_{\boldsymbol{j}}$ bilangan $w = \mathcal{R}(w) + \boldsymbol{j}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{i}}(w) = (w, 0)$, maka

$$q \otimes w = (q_1 w, q_2 w) \quad (19)$$

Bukti.
Teorema 6 dibuktikan dengan cara sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
q \otimes w &= (q_1, q_2) \otimes (w, 0) \\
&= (a + \boldsymbol{j}c, b + \boldsymbol{j}d)(w, 0) \\
&= \Big(\big((a + \boldsymbol{j}c)w + (a + \boldsymbol{j}c)0\big), \\
&\quad (b + \boldsymbol{j}d)w + (b + \boldsymbol{j}d)0\Big) \\
&= (a + \boldsymbol{j}c)w, (b + \boldsymbol{j}d)w \\
&= (q_1 w, q_2 w)
\end{aligned}$$

Teorema 7.
Misalkan, diberikan $q = (q_1, q_2) = (a + \boldsymbol{j}c, b + \boldsymbol{j}d)$, untuk sebarang $\mathbb{C}_{\boldsymbol{k}}$ bilangan $s = \mathcal{R}(s) + \boldsymbol{k}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s) = \big(\mathcal{R}(s), \boldsymbol{j}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$, maka

$$\begin{aligned}
&q \otimes s = (q_1)\mathcal{R}(s) - \boldsymbol{j}q_2\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s), \\
&\boldsymbol{i}\big(q_2\mathcal{R}(s) + \boldsymbol{j}q_1\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)
\end{aligned} \quad (20)$$

Bukti.

$$\begin{aligned}
q \otimes s &= \big((a + \boldsymbol{j}c), (b + \boldsymbol{j}d)\big)\big(\mathcal{R}(s), \boldsymbol{j}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big) \\
&=^1 \big((a + \boldsymbol{j}c) + \boldsymbol{i}(b + \boldsymbol{j}d)\big)\big(\mathcal{R}(s) + \boldsymbol{k}\mathfrak{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)
\end{aligned}$$

$=^2 \big((a+\boldsymbol{j}c)\big)\big(\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{k}\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$+\big(\boldsymbol{i}(b+\boldsymbol{j}d)\big)\big(\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{k}\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$=^3 \big((a+\boldsymbol{j}c)\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{ij}(a+\boldsymbol{j}c)\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$+\boldsymbol{i}(b+\boldsymbol{j}d)\mathcal{R}(s)-\boldsymbol{j}(b+\boldsymbol{j}d)\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)$
$=^4 \big((a+\boldsymbol{j}c)\mathcal{R}(s)-\boldsymbol{j}(b+\boldsymbol{j}d)\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$+\boldsymbol{i}\big((b+\boldsymbol{j}d)\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{j}(a+\boldsymbol{j}c)\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$=^5 \big((q_1)\mathcal{R}(s)-\boldsymbol{j}q_2\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$+\boldsymbol{i}\big(q_2\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{j}q_1\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$
$=^6 (q_1)\mathcal{R}(s)-\boldsymbol{j}q_2\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s),$
$\boldsymbol{i}\big(q_2\mathcal{R}(s)+\boldsymbol{j}q_1\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}(s)\big)$

Langkah 1 digunakan definisi notasi $C_{\boldsymbol{j}}-Pair$, sedangkan langkah 2, 3, 4, 5 dan 6, digunakan sifat komutatif, asosiatif dan distributf quaternion dengan memperhatikan operasi bikompleks quaternion.

Teorema 8.
Misalkan, diberikan $q=(q_1,q_2)=(a+\boldsymbol{j}c,b+\boldsymbol{j}d)$, dan sebaran bilangan $\boldsymbol{k}=(0,\boldsymbol{j})$, maka $q\otimes\boldsymbol{k}$ dinyatakan dengan,

$$q\otimes\boldsymbol{i}=(-q_2,q_1) \qquad (21)$$

Bukti.
$q\otimes\boldsymbol{i}=(q_1,q_2)\otimes(0,\boldsymbol{j})$
$=\big((a+\boldsymbol{j}c)+\boldsymbol{i}(b+\boldsymbol{j}d)\big)(0+\boldsymbol{i})$
$=(\boldsymbol{i}(a+\boldsymbol{j}c)-(b+\boldsymbol{j}d))$
$=(-(b+\boldsymbol{j}d)+\boldsymbol{i}(a+\boldsymbol{j}c))$
$=(-q_2,q_1)$

Teorema 9.
Misalkan, diberikan $q=(q_1,q_2)=(a+\boldsymbol{j}c,b+\boldsymbol{j}d)$, dan sebaran bilangan $\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{j},0)$, maka $q\otimes\boldsymbol{j}$ dinyatakan dengan

$$q\otimes\boldsymbol{j}=(q_1\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}q_2) \qquad (22)$$

Bukti.
$q\otimes\boldsymbol{j}=(q_1,q_2)\otimes(\boldsymbol{j},0)$
$=\big((a+\boldsymbol{j}c)+\boldsymbol{i}(b+\boldsymbol{j}d)\big)(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}0)$
$=(a+\boldsymbol{j}c)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{ij}(b+\boldsymbol{j}d)$
$=q_1\boldsymbol{j}+\boldsymbol{ij}q_2$
$=(q_1\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}q_2)$

Teorema 10.
Misalkan, diberikan $q=(q_1,q_2)=(a+jc,b+\boldsymbol{j}d)$, dan sebaran bilangan $\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{j},0)$, maka $q\otimes\boldsymbol{j}$ dinyatakan dengan

$$q\otimes\boldsymbol{j}=(-\boldsymbol{j}q_2,\boldsymbol{j}q_1) \qquad (23)$$

Bukti.
$q\otimes\boldsymbol{j}=(q_1,q_2)\otimes(\boldsymbol{j},0)$
$=\big((a+\boldsymbol{j}c)+\boldsymbol{i}(b+\boldsymbol{j}d)\big)(0+\boldsymbol{ij})$
$=(a+\boldsymbol{j}c)\boldsymbol{ij}+\boldsymbol{iij}(b+\boldsymbol{j}d)$
$=\boldsymbol{i}(a+\boldsymbol{j}c)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{j}(b+\boldsymbol{j}d)$
$=-\boldsymbol{j}(b+\boldsymbol{j}d)+\boldsymbol{ij}(a+\boldsymbol{j}c)$
$=(-\boldsymbol{j}q_2,\boldsymbol{j}q_1)$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bagian sebelumnya disimpulkan bahwa, notasi $C_{\boldsymbol{j}}-pair$ merupakan salah satu rujukan yang bisa digunakan untuk merepresentasikan bilangan quaternion. Pada bagian akhir pembahsan dilakukan notasi $C_{\boldsymbol{j}}-pair$ pada perkalian bikompleks quaternion yang dimana merupakan kasus khusus dari perkalian quaternion.

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bahri, M,. Ashino, R., and Vailancourt, R. 2013. Convolution theorems for quaternion Fourier transform, properties and applications, *Hindawi Publishing Corporation Abstact and Applied Analysis*, vol. 2013, ID 162769 : 1-2.

[2] Bahri, M., Ashino, R. 2013. Correlation theorems for type II quaternion Fourier transform, *International conference on wavelet analysis and pattern recognition*. 136-141.

[3] Bahri, M., Hitzer, Ashino, R., and Hayasi, A. 2008. An uncertainty principle for quaternion fourier transform. *Computer and Mathematics with Applications*. 56: 2398.

[4] Hitzer, E. M. S. 2013. Quaternion Fourier Trasform on Quaternion Field and Generalization. *Advance Applications of Clifford Algebras*. 17: 1-20.

[5] Muh. Irwan. dan Muhammad Ridwan. 2017. Transformasi Fourier dan Transformasi Fourier Quaternion, Jurnal Matematika Statistika dan Analisis Vol 5 No 2 (2017).

[6] Muh. Irwan. 2015. Quaternion and it's properties, Jurnal Matematika Statistika dan Analisis Vol 3 No 1 (2017).

[7] Morais, J.P., Geogiev S., Sprosieg, W. 2012. *Real Quaternionic Calculus Handbook.* Springer Basel: Hidelberg New York London.

[8] Todd, dkk. 2014. Quaternion Fourier Transform for Signal and Image Processing, Fokus