

PENGGUNAAN MODEL EPIDEMI SIR (*SUSCEPTIBLES-INFECTED-REMOVED*) PADA PENYEBARAN PENYAKIT HIV/AIDS DI MAKASSAR

M. Rais Ridwanⁱ

Fardinahⁱⁱ

ⁱ Program Studi Pendidikan Matematika STKIP YPUP Makassar, mrarisridwan@yahoo.com

ⁱⁱ Program Studi Pendidikan Matematika STKIP YPUP Makassar

ABSTRAK. Penelitian ini menggunakan data jumlah penduduk Kota Makassar dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS mulai tahun 2014 s.d 2016 diperoleh model penyebaran penyakit HIV/AIDS dengan penggunaan model epidemi *SIR* dengan titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$. Kemudian berdasarkan nilai eigen matriks Jacobi diperoleh titik (S, I) tersebut bersifat stabil asimtotik dengan nilai – nilai eigen $\lambda_1 = -0,01$ dan $\lambda_2 = -91,4$. Selanjutnya, diperoleh bilangan reproduksi dasar, yakni $R_0 = 91,471$, yang menunjukkan bahwa satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 91 hingga 92 jiwa individu rentan terhadap penyakit HIV/AIDS. Dalam hal ini, penyakit tersebut di Kota Makassar akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun ke depan. Hal ini dibuktikan dengan simulasi numerik menggunakan software Maple dan Matlab dengan melihat perilaku solusi penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk kurun waktu t yang relatif lama.

Kata Kunci: Model Epidemi *SIR*, Titik Ekuilibrium, Kestabilan Titik Ekuilibrium, Simulasi Numerik

1. PENDAHULUAN

Dalam beberapa tahun terakhir ini, penyakit HIV/AIDS merupakan penyakit dengan tingkat penyebaran yang sangat mengkhawatirkan meskipun berbagai upaya pencegahan dan penanggulangan terus dilakukan. Hal ini dikarenakan semakin tingginya mobilitas penduduk antarwilayah, semakin mudahnya komunikasi antarwilayah, meningkatnya perilaku seksual yang tidak aman serta meningkatnya penyalahgunaan NAPZA melalui suntikan.

Perkembangan kasus HIV/AIDS di Makassar dari tahun ke tahun cenderung mengalami peningkatan. Pada tahun 2010 ditemukan 371 penderita HIV dan 87 penderita AIDS dan meningkat di tahun 2011 yaitu 516

penderita HIV yang ditemukan di Puskesmas dan Rumah Sakit dan 448 penderita AIDS ditemukan di Rumah Sakit. Akan tetapi, pada tahun 2012, kasus HIV AIDS menurun dibandingkan tahun sebelumnya yaitu 493 kasus yang ditemukan di Puskesmas dan Rumah Sakit dan kasus AIDS menurun menjadi 407 kasus yang ditemukan di Rumah Sakit.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, perkembangan ilmu di bidang matematika memberikan peranan penting dalam menganalisis dan mengontrol penyebaran penyakit. Peranan tersebut berupa model matematika yang mempelajari penyebaran penyakit. Penyakit HIV/AIDS dapat dimodelkan dengan menggunakan model epidemiologi yakni model epidemi *SIR* (*Susceptibles-Infected-Removed*). Model epidemi *SIR* merupakan model epidemi dengan karakteristik bahwa setiap individu rentan terinfeksi suatu penyakit, dinotasikan dengan S (*susceptibles*), kemudian individu yang rentan terinfeksi tersebut berinteraksi dengan individu yang terinfeksi, dan akhirnya setiap individu yang terinfeksi dinotasikan dengan I (*infected*). Selanjutnya, dengan pengobatan medis, individu yang terinfeksi mungkin akan sembuh, yang dinotasikan dengan R (*removed*). Model epidemi *SIR* inilah yang selanjutnya digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit dan dituliskan dalam bentuk sistem persamaan diferensial dan lebih lanjut aplikasinya dilakukan untuk menyelidiki perilaku penyebaran penyakit yang dibicarakan.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (0.1)$$

dengan $f_i : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$. Kemudian diberikan syarat awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sistem (0.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (0.2)$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$, dan syarat awal $\mathbf{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in E$. Selanjutnya, notasi $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}(t_0), t)$ menyatakan solusi Sistem (0.2) dengan nilai awal x_0 .

Titik Ekuilibrium dan Kriteria Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan definisi titik ekuilibrium Sistem (0.2) dan berikutnya diberikan kriteria kestabilan titik ekuilibrium.

Definisi 2.1 (Perko, 1991) Titik $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium Sistem (0.2).

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Misalkan $\mathbf{x}(t)$ adalah solusi dari Sistem (0.2) dan $\hat{\mathbf{x}}$ adalah titik ekuilibriumnya.

(i) Titik $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ dengan sifat $\|\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$ berlaku $\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, untuk setiap $t \geq t_0$.

(ii) Titik $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\hat{\mathbf{x}}$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ dengan sifat $\|\mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}\| = 0$.

(iii) Titik $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi (i).

Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Diberikan sistem persamaan diferensial linear berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \end{aligned} \quad (0.3)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

dengan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$. Sistem (0.3) dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (0.4)$$

dengan $\mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan \mathbf{A} matriks ukuran $n \times n$. Selanjutnya, diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (0.5)$$

dengan $\mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ dan $\mathbf{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (0.5) disebut sistem nonlinear, jika sistem tersebut tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (0.3).

Definisi 2.3 (Kocak dan Hale, 1991) Diberikan fungsi $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ pada Sistem (0.2) dengan $f_i \in C'(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ dan $\hat{\mathbf{x}}$ titik ekuilibrium Sistem (0.2). Kemudian matriks

$$\mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

dinamakan matriks Jacobian fungsi \mathbf{f} dari Sistem (0.2) di titik $\hat{\mathbf{x}}$.

Definisi 2.4 (Perko, 1991) Diberikan matriks Jacobian (0.6). Sistem linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{x}$ disebut linearisasi Sistem (0.2) disekitar titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$.

Definisi 2.5 (Perko, 1991) Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $\mathbf{Jf}(\hat{\mathbf{x}})$ mempunyai bagian real tak nol.

Teorema 2.6 (Perko, 1991) Diberikan matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$ dari Sistem non linear (0.2).

- (i) Jika bagian real semua nilai eigen λ dari matriks $Jf(\hat{x})$ bernilai negatif, maka titik ekuilibrium \hat{x} stabil asimtotik.
- (ii) Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen λ matriks $Jf(\hat{x})$ yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium \hat{x} tidak stabil.

Teorema 2.7 (Perko, 1991) Diberikan sistem linear berikut:

$$\dot{x} = Ax \quad (0.7)$$

dengan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Selanjutnya,

dimisalkan $\Delta = \det(A)$ dan $\tau = \text{trace}(A)$ sehingga

- (i) Jika $\Delta < 0$ maka Sistem (0.7) merupakan sadel pada titik asal,
- (ii) Jika $\Delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ maka Sistem (0.7) merupakan node pada titik asal. Stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$,
- (iii) Jika $\Delta > 0$ dan $\tau^2 - 4\Delta < 0$ dengan $\tau \neq 0$ maka Sistem (0.7) merupakan fokus pada titik asal. Stabil jika $\tau < 0$ dan tidak stabil jika $\tau > 0$,
- (iv) Jika $\Delta > 0$ dan $\tau = 0$ maka Sistem (0.7) merupakan center pada titik asal.

Himpunan Invarian

Definisi 2.8 (Khalil, 2002) Suatu himpunan M disebut himpunan Invarian terhadap Sistem (0.2), jika untuk setiap syarat awal $x(0) \in M$, maka $x(t, x(0)) \in M$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.9 (Boyd, 2008) Titik ekuilibrium $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ pada Sistem (0.2) dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai awal $x(0) = x_0$ yang diberikan, setiap solusi Sistem (0.2) yaitu $x(t)$ untuk $t \rightarrow \infty$ menuju titik ekuilibrium \hat{x} .

3. METODOLOGI

Tahapan Penelitian

Adapun tahapan atau prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

- (a) Melakukan pengambilan data di Dinas Kesehatan Kota Makassar dan Badan Pusat Statistika Kota Makassar;
- (b) Melakukan analisis deskriptif data sebagai gambaran awal penyebaran penyakit HIV/AIDS di Makassar;
- (c) Membuat asumsi berdasarkan data-data yang diperoleh dan menggunakan model epidemi SIR pada penyebaran penyakit HIV/AIDS tersebut ke bentuk sistem persamaan diferensial;
- (d) Melakukan analisis titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium model epidemi SIR pada penyebaran penyakit HIV/AIDS;
- (e) Menginterpretasi kestabilan titik ekuilibrium dengan mengidentifikasi penyebaran penyakit HIV/AIDS dalam kurun waktu tertentu yang relatif lama.

Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari dinas Kesehatan Kota Makassar dan Badan Pusat Statistika (BPS) Kota Makassar. Data yang digunakan merupakan data dalam kurun waktu 3 tahun yaitu data pada tahun 2014 – 2016.

Variabel Penelitian

Variabel dalam penelitian ini adalah jumlah individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS (S), jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS (I), dan jumlah individu yang sembuh dari penyakit HIV/AIDS. Adapun parameter dalam penelitian ini adalah laju kelahiran atau migrasi (A), laju penularan penyakit (β), dan laju kematian alami (δ).

4. PEMBAHASAN

Analisis Data Deskriptif Model Epidemi HIV/AIDS

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah penderita HIV/AIDS dan data jumlah penduduk kota Makassar pada tahun 2014 – 2016. Berikut diberikan data jumlah penduduk kota Makassar dalam kurun 3 tahun.

Tabel 1. Jumlah Penduduk Kota Makassar Tahun 2014 – 2016

Tahun	Jumlah Penduduk (Jiwa)		Total
	Laki-laki	Perempuan	
2014	706814	722428	1429242
2015	717047	732354	1449401
2016	727314	742287	1469601

Tabel 1. di atas menunjukkan bahwa jumlah penduduk kota Makassar pada tahun 2014 sebanyak 1429242 jiwa, ditulis $N = 1429242$ dengan asumsi jumlah penduduk awal yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS sebanyak 1429242, ditulis $S(0) = S(2014) = 1429242$. Kemudian jumlah penduduk pada tahun 2016 sebanyak 1469601 jiwa dengan asumsi jumlah penduduk setelah 2 tahun yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS sebesar 1469601, ditulis $S(2016) = 1469601$.

Selanjutnya, berikut ini diberikan data jumlah penderita HIV/AIDS di kota Makassar pada tahun 2014 – 2016.

Tabel 2. Jumlah Penderita HIV/AIDS Kota Makassar Tahun 2014 – 2016

Tahun	Jumlah Kasus yang ditemukan (Jiwa)	
	HIV	AIDS
2014	705	112
2015	665	208
2016	773	432

Tabel 2. di atas menunjukkan bahwa jumlah penduduk kota Makassar terinfeksi penyakit HIV/AIDS pada tahun 2014 sebanyak 112 jiwa, ditulis $I(t) = 112$ dengan asumsi jumlah penduduk awal yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS sebanyak 112, ditulis $I(0) = I(2014) = 112$. Kemudian jumlah penduduk yang terinfeksi pada tahun 2016 sebanyak 432 jiwa dengan asumsi jumlah penduduk setelah 2 tahun yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS sebesar 432, ditulis $I(2016) = 432$.

Penentuan Asumsi dan Parameter Model Epidemi HIV/AIDS

Data-data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Makassar menunjukkan bahwa jumlah penduduk kota Makassar yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS mulai tahun 2014 s.d. 2016 sedangkan data yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Kota Makassar menunjukkan bahwa data jumlah penduduk kota Makassar mulai tahun 2014 s.d. 2016. Berdasarkan data – data tersebut dibentuk asumsi – asumsi sebagai berikut.

1. Dalam populasi terjadi kelahiran dan migrasi dimana data jumlah penduduk awal Kota Makassar rentan terinfeksi penyakit HIV/AIDS
2. Penyakit yang dibicarakan dalam penelitian ini penyakit menular
3. Individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS tidak mengalami kesembuhan
4. Setiap individu yang dibicarakan mengalami kematian secara alami.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dibentuk model epidemi HIV/AIDS berikut.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \delta S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \delta I, \end{cases} \quad (0.8)$$

dengan A menyatakan parameter laju kelahiran atau migrasi, β menyatakan laju penularan penyakit HIV/AIDS dan δ menyatakan laju kematian alami. Kemudian untuk variabel S menyatakan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS dan I menyatakan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS.

Selanjutnya, berdasarkan data variabel yang menyatakan jumlah penduduk awal Kota Makassar dan jumlah penduduk setelah 2 tahun yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS, masing-masing yakni $S(0) = S(2014) = 1429242$ dan $S(2016) = 1469601$ serta data variabel jumlah penduduk setelah 2 tahun yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS, yakni $I(2016) = 432$ masing-masing disubstitusikan ke dalam bentuk solusi khusus dari subpopulasi jumlah individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS, yakni S sehingga

$$S(t) = S(0)e^{-\frac{\beta I(t)}{\delta}},$$

dengan $S(t)$ menyatakan jumlah penduduk yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS setelah 2 tahun dan $S(0)$ menyatakan jumlah penduduk awal serta $I(t)$ menyatakan jumlah penduduk yang terinfeksi terhadap penyakit HIV/AIDS setelah 2 tahun diperoleh

$$\frac{\beta}{\delta} = 6,4 \times 10^{-5},$$

dengan laju penularan penyakit HIV/AIDS dari individu rentan menjadi terinfeksi sebesar $\beta = 6,4 \times 10^{-6}$ dan asumsi laju kematian alami dalam 10 tahun sebesar $\delta = \frac{1}{10}$ diperoleh $\delta = 10^{-1} = 0,1$. Akibatnya, diperoleh model epidemi penyakit HIV/AIDS dengan asumsi individu yang terinfeksi dan tidak mengalami kesembuhan terhadap penyakit yang dibicarakan, yakni.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 1429242 - 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1S \\ \frac{dI}{dt} = 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1I \end{cases} \quad (0.10)$$

Penentuan Titik Ekuilibrium Model Epidemi HIV/AIDS

Diberikan model penyebaran penyakit HIV/AIDS dalam Sistem Persamaan (0.10). Berdasarkan Sistem (0.10) di atas ditentukan titik ekuilibrium atau titik tetap dengan memisalkan $\frac{dS}{dt} = 0$ dan $\frac{dI}{dt} = 0$ sehingga

$$\begin{cases} 1429242 - 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1S = 0 \\ 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1I = 0 \end{cases} \quad (0.11)$$

Jika persamaan (2) pada persamaan (0.11) dimisalkan $I \neq 0$, maka $6,4 \times 10^{-6} S - 0,1 = 0$ diperoleh $S = 15625$. Selanjutnya, untuk $S = 15625$ disubstitusikan ke Persamaan (1) diperoleh $I = 14276795$. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium Sistem Persamaan (0.2), yakni $(S, I) = (15625, 14276795)$ yang menyatakan bahwa jumlah individu yang rentan dan terinfeksi terhadap penyakit HIV/AIDS selama 10 tahun masing-masing adalah 15625 jiwa dan 14276795 jiwa.

Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Model Epidemi HIV/AIDS

Diketahui model penyebaran penyakit HIV/AIDS dalam Sistem Persamaan (0.2), dengan titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$. Kemudian

ditentukan kestabilan Sistem (0.2) di titik ekuilibrium tersebut. Olehnya itu, dimisalkan

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = f_1(S, I) \\ \frac{dI}{dt} = f_2(S, I) \end{cases} \quad \text{sehingga} \quad \begin{cases} f_1(S, I) = 1429242 - 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1S \\ f_2(S, I) = 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1I, \end{cases} \quad (0.12)$$

diperoleh linearisasi Sistem Persamaan (0.12) di atas, yakni dalam bentuk matriks Jacobian berikut.

$$Jf(S, I) = \begin{pmatrix} \frac{df_1(S, I)}{dS} & \frac{df_1(S, I)}{dI} \\ \frac{df_2(S, I)}{dS} & \frac{df_2(S, I)}{dI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,4 \times 10^{-6} I - 0,1 & -6,4 \times 10^{-6} S \\ 6,4 \times 10^{-6} I & 6,4 \times 10^{-6} S - 0,1 \end{pmatrix} \quad (0.13)$$

Kemudian berdasarkan (0.13) diperoleh matriks Jacobian di titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$, yakni

$$Jf(15625, 14276795) = \begin{pmatrix} -91,5 & -0,1 \\ 91,4 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.14)$$

Selanjutnya, berdasarkan matriks Jacobian (0.14) diperoleh persamaan karakteristik, yakni

$$\lambda^2 + 91,5\lambda + 9,14 = 0$$

diperoleh nilai eigen, yakni $\lambda_1 = -0,01$ dan $\lambda_2 = -91,4$ dengan $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$ sehingga diperoleh titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$ stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi sangat sedikit, maka dengan bertambahnya waktu populasi menuju ke titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$ yang berarti penyakit HIV/AIDS tetap ada dalam populasi.

Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Sistem persamaan (0.8) di atas mempunyai titik ekuilibrium, yakni $(S, I) = \left(\frac{\delta}{\beta}, \frac{\beta A - \delta^2}{\beta \delta}\right)$, dengan

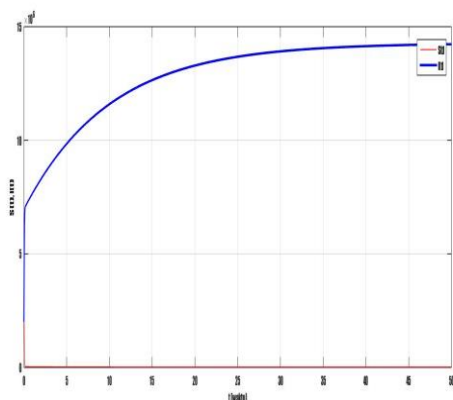
$\frac{\beta A}{\delta^2} > 0$ dimana $\frac{\beta A}{\delta^2}$ merupakan bilangan reproduksi dasar, yakni

$$R_0 = \frac{\beta A}{\delta^2} = \frac{(6,4 \times 10^{-6})(1429242)}{(10^{-1})^2} = 91,471,$$

yang menunjukkan bahwa satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 91 hingga 92 jiwa individu rentan dalam populasi penyakit HIV/AIDS.

Simulasi Numerik

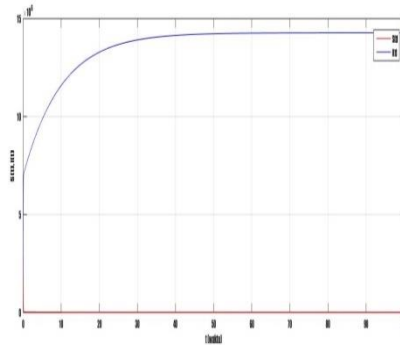
Diberikan simulasi numerik Sistem Persamaan (0.8) yang menunjukkan ilustrasi perilaku kelas individu yang terinfeksi atau terjangkit penyakit dengan kelas individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS dalam ukuran jumlah mulai tahun 2014 s.d. 2016. Parameter yang digunakan adalah A menyatakan rata-rata jumlah individu yang lahir dan imigrasi, dimana jumlah penduduk Kota Makassar pada tahun 2014. Kemudian, parameter β menyatakan rata-rata jumlah kontak yang menyebabkan individu rentan menjadi terinfeksi setelah melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi sedangkan δ menyatakan rata-rata jumlah penduduk yang meninggal secara alami. Berikut diberikan simulasi numerik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ yang menyatakan jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS pada saat t .



Gambar 1. Grafik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk $0 \leq t \leq 50$

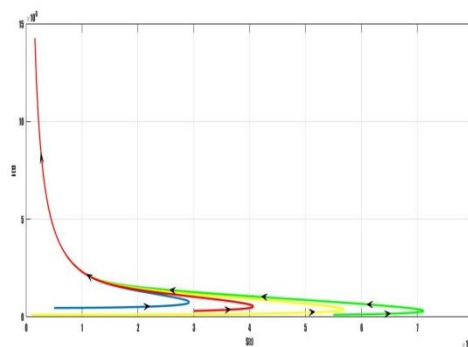
Gambar 5.1 di atas menunjukkan bahwa pada waktu $0 \leq t \leq 50$ tahun, jumlah individu yang rentan terhadap penyakit HIV/AIDS

semakin berkurang sedangkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS mengalami peningkatan jumlah yang signifikan seiring berjalannya waktu. Berikut diberikan ilustrasi perkembangan jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS untuk waktu 100 tahun.



Gambar 5.2 Grafik penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ untuk $0 \leq t \leq 100$

Gambar 5.2 di atas mengilustrasikan bahwa pada waktu $0 \leq t \leq 100$ tahun, jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS tidak mengalami perubahan peningkatan jumlah yang signifikan seiring berjalannya waktu. Dalam kondisi ini disebut dengan kondisi stabil dari sistem di titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$. Dengan demikian, penyakit HIV/AIDS di Kota Makassar akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun ke depan. Berikut diberikan ilustrasi jumlah individu yang rentan dan jumlah individu yang terinfeksi dalam bidang fase.



Gambar 3. Potret fase pada bidang $S(t)$ dan $I(t)$ Sistem (5.10)

Berdasarkan Gambar 5.3 di atas terlihat bahwa untuk setiap trayektori penyelesaian $S(t)$ dan $I(t)$ dengan nilai awal dan

$\{(S_0, I_0)\} = \{(300000, 300000), (50000, 450000), (10000, 100000), (300000, 300000)\}$ akan menuju ke titik $(15625, 14276795)$ yang berarti populasi bersifat endemik dimana selalu ada individu yang terjangkit penyakit HIV/AIDS untuk kurun waktu 100 tahun.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis data deskriptif jumlah penduduk Kota Makassar dan jumlah individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS mulai tahun 2014 s.d 2016 diperoleh bahwa

1. Asumsi – asumsi dalam penelitian ini adalah (a) dalam populasi terjadi kelahiran dan migrasi dimana data jumlah penduduk awal Kota Makassar rentan terinfeksi penyakit HIV/AIDS (b) Penyakit yang dibicarakan dalam penelitian ini penyakit menular (c) Individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS tidak mengalami kesembuhan dan (d) Setiap individu yang dibicarakan mengalami kematian secara alami.
2. Berdasarkan asumsi – asumsi tersebut diperoleh bentuk model epidemi penyakit HIV/AIDS, yakni

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 1429242 - 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1S \\ \frac{dI}{dt} = 6,4 \times 10^{-6} SI - 0,1I, \end{cases}$$
 dengan titik ekuilibrium $(S, I) = (15625, 14276795)$. Kemudian berdasarkan nilai eigen matriks Jacobi diperoleh titik $(S, I) = (15625, 14276795)$ bersifat stabil asimtotik dengan nilai – nilai eigen $\lambda_1 = -0,01$ dan $\lambda_2 = -91,4$.
3. Dalam penelitian ini diperoleh bilangan reproduksi dasar, yakni $R_0 = 91,471$, yang menunjukkan bahwa satu individu yang terinfeksi, rata-rata dapat menularkan kepada 91 hingga 92 jiwa individu rentan terhadap penyakit HIV/AIDS. Dalam hal ini, penyakit HIV/AIDS di Kota Makassar akan bersifat endemik dalam kurun waktu 100 tahun ke depan.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Khalil, H.K. 2002. “*Nonlinear Systems, 3rd edition*”. New Jersey, USA: Prentice Hall
- [2] Kocak, H. and Hale, J.K. 1991. “*Dynamics and Bifurcation*”. New York: Springer Verlag.
- [3] Olsder, G.J. 1994. “*Mathematical Systems Theory*”. Netherlands: Delftse Uitghehers Maatschappij, CW Delft.
- [4] Perko, L. 1991. “*Differential Equations and Dynamical Systems*”. New York: Springer Verlag.
- [5] Tang, Y., Huang, D., Ruan, S. and Zhang, W. 2008. “Coexistence of limit cycles and homoclinic loops in a SIRS model with a nonlinear infection forces”. *SIAM J. Appl. Math.*, 69, 621-639.
- [6] Tjolleng, A., Komalig, H.A.H, dan Prang, J.D. 2006. “Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinear SIR (*Susceptible, Infectious, and Recovered*)”. *Jurnal Ilmiah Sains*, Vol. 13 N, 9-14.
- [7] Xiao, D., and Ruan, S. 2007. “Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate”. *Math. Biosci.*, 208, 419-429.
- [8] Zhixing, H., Ping, B., Wanbio, M., and Ruan, S. 2011. “Bifurcations of an SIRS epidemic model with nonlinear incidence rate”. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2, 93-112.