EKUIVALENSI KEKONVERGENAN POINTWISE DAN KEKONVERGENAN SERAGAM PADA BARISAN FUNGSI

Wahidah Alwi[i], Muh. Irwan[ii], Ishak R[iii]

[i] *Prodi Matematika FST, UINAM, wahidah.alwi@uin-alauddin.ac.id*
[ii] *Prodi Matematika FST, UINAM, muhirwan@uin-alauddin.ac.id*
[iii]*Mahasiswa Program Studi Matematika-FST, UINAM, ishakr97@gmail.com*

ABSTRAK, Tulisan ini membahas tentang ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam pada barisan fungsi. Kekonvergenan pointwise adalah kekonvergenan barisan fungsi dimana suatu barisan fungsi dapat memiliki satu atau lebih nilai limit dan tidak mampu mempertahankan sifat kontinu suatu fungsi. Sedangkan kekonvergenan seragam mengakibatkan ketunggalan nilai limit dan mampu mempertahankan kekontinuan fungsi. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan karakteristik dari barisan fungsi yang menjamin ekuivalensi dari dua jenis kekonvergenan tersebut. Terkait dengan ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam, dapat ditunjukkan karakteristik barisan fungsi yang menjadi syarat terjadinya ekuivalensi yaitu barisan yang monoton dan terbatas serta ketunggalan nilai limitnya. Selain itu ditunjukkan karakteristik fungsi yang menjamin terjadinya ekuivalensi yaitu barisan fungsi monoton seragam.

Kata Kunci: *barisan fungsi, konvergen pointwise, konvergen seragam*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang dari matematika analisis adalah barisan. Barisan dapat diartikan sebagai fungsi dari himpunan bilangan asli kehimpunan bilangan real $(f: N \to R)$. Barisan telah mengalami perkembangan yang cukup besar, khususnya dalam mencari sifat-sifat yang dimiliki serta kekonvergenannya. Hingga saat ini sifat-sifat barisan tetap menarik untuk dikaji. Barisan fungsi merupakan salah satu bentuk dari barisan yang elemen-elemennya berupa fungsi. Dimana bentuk fungsi yang merupakan suku ke-n bergantung pada bilangan asli. Seperti halnya barisan bilangan riil, barisan fungsi juga memiliki sifat dan kekonvergenannya pun dapat diselidiki. Seperti pada barisan bilangan riil, ketika dihadapkan dengan sebuah barisan fungsi $\{f_n\}$ maka terjadi ketertarikan untuk mengetahui perilaku f_n apabila $n \to \infty$.

Kekonvergenan dalam barisan fungsi terdapat dua jenis, yaitu kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam. Salah satu kekurangan dari kekonvergenan pointwise adalah ketidak mampuannya mempertahankan kekontinuan fungsi. Lain halnya dengan kekonvergenan seragam, ketika suatu barisan fungsi dinyatakan konvergen seragam ke f maka dapat dipastikan bahwa f kontinu. Dengan kata lain, kekonvergenan seragam lebih kuat dari pada kekonvergenan pointwise dengan kemampuannya mempertahankan sifat kekontinuan fungsi. Meski demikian, namun ada hal dimana kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam bernilai sama.

Pembahasan dalam tulisan ini akan mencari ekuivalensi dari kedua kekonvergean tersebut. Pembahasan mengenai ekuivaensi akan dibatasi pada interval $[a, b]$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Sistem bilangan real

Himpunan dalam bilangan real biasa disajikan dalam bentuk interval atau yang lain. Bentuk tersebut menyatakan batasan dari himpunan.

Definisi 1. *Diberikan subset tak kosong* $S \subset R$
Himpunan S dikatakan terbatas keatas ($bounded\ above$) jika terdapat suatu bilangan $u \in R$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan batas atas ($upper\ bound$) dari S.

a) Himpunan S dikatakan terbatas kebawah ($bounded\ below$) jika terdapat suatu bilangan $w \in R$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan batas bawah ($lower\ bound$) dari S.
b) Suatu himpunan dikatakan terbatas ($bounded$) jika terbatas keatas dan terbatas

kebawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas($unbounded$).

Suatu himpunan yang terbatas dapat dengan diketahui dengan mudah batasnya. Akan tetapi lain halnya dengan batas optimum terkadang tidak dimiliki oleh suatu himpunan. Dalam bagian ini akan dijelaskan mengenai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu himpunan.

Definisi 2. Diberikan subset tak kosong R

a) Jika S terbatas keatas, maka suatu bilangan u disebut supremum (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
   1) u merupakan batas atas S, dan
   2) Jika v adalah sebarang batas atas S, $u \leq v$.
   Ditulis $u = \sup S$
b) Jika S terbatas kebawah, maka suatu bilangan w disebut infimum (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:
   1) w merupakan batas bawah S, dan
2) Jika t adalah sebarang batas atas S, $t \leq w$. Ditulis $w = \inf S$.

Suatu himpunan tak kosong S subset dari R memiliki supremum yang tunggal, sebab sup S merupakan batas atas terkecil dari S. Hal tersebut berlaku pula untuk infimum suatu himpunan.

Barisan bilangan real

Barisan bilangan real merupakan pemetaan dari bilangan asli kebilangan real yang diperjelas dengan definisi berikut

Definisi 3
Barisan bilangan real (atau barisan di R) adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan N dengan range dalam R.
Selanjutnya, suatu barisan dikatakan konvergen kesuatu titik jika barisan tersebut memiliki limit.

Definisi 4
Barisan $X = (x_n)$ dikatakan konvergen ke $x \in R$, atau x dikatakan limit barisan (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, untuk x_n berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Beberapa sifat barisan konvergen dapat dilihat dalam teorema berikut yang menyangkut ketunggalan nilai limit dan keterbatasan barisan.

Teorema 5. *Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal).*

Bukti:
Misalkan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x'$dan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x"$ dengan $x' \neq x"$. Jika diambil $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian sehingga $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K"$ dan terdapat $K"$ sedemikian sehingga $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk semua $n \geq K"$. Dipilih K =max$\{K', K"\}$. Menurut Ketaksamaan Segitiga untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x' - x"| &= |x' - x_n + x_n - x"| \\ &= |x' - x_n| + |x_n - x"| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x" = 0$ yang berarti $x' = x"$. Kontradiksi dengan pengandaian, sehingga terbukti bahwa limit (x_n) tunggal.

Teorema 6. *Jika $X = (x_n)$ konvergen, maka $X = (x_n)$ terbatas.*

Bukti:
Diketahui $\lim(x_n) = x$ dan ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian hingga berlaku $|x_n - x| < 1$ untuk semua $n \geq K$. Dengan ketaksamaan segitiga untuk $n \geq K$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n| = |x_n - x + x| &\leq |x_n - x| + |x| \\ &< 1 + |x| \end{aligned}$$

Jika dipilih

$$M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{k-1}|, 1 + |x|\}$$

Maka terbukti bahwa $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in N$.

Suatu barisan dikatakan monotn naik apabila $x_n \leq x_{n+1}$ untuk semua $n \in N$ dan barisan dikatakan monoton tuerun apabila $x_n \geq x_{n+1}$untuk semua $n \in N$.

Teorema 7

(i) Jika $X = (x_n)$ naik (monoton) dan terbatas ke atas, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}.$$

(ii) Jika $X = (x_n)$ turun (monoton) dan terbatas ke bawah, maka $X = (x_n)$ konvergen dengan

$$\lim(x_n) = \inf\{x_n : n \in N\}.$$

Bukti:
Karena $X = (x_n)$ terbatas ke atas, maka terdapat $M \in N$ sedemikian hingga $x_n \leq M$ untuk semua $\in N$. Namakan $A = \{x_n : n \in N\}$, maka $\subset R$, terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap, maka A memiliki supremum, misalkan $x = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga $x - \varepsilon < x_k \leq x$. Karena X monoton naik, maka untuk $\forall n \geq K$ berlaku

$$x - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$
Atau
$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Ini membuktikan bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke $x = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$.
pembuktian untuk infimum serupa.

Barisan fungsi
Barisan fungsi merupakan barisan yang elemennya adalah berupa fungsi. Sehingga fungsi untuk setiap suku bergantung pada bilangan asli. Baisan fungsi konvergen terbagi atas konvergen pointwise dan konvergen seragam. Kekonvergenan pointwise didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8
Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen pointwise ke suatu fungsi f jika $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in E$ dimana $E \subseteq R$.
Definisi tersebut cukup jelas menggambarkan bahwa nilai interval yang diberikan sangat mempengaruhi nilai limitnya sebagaimana dalam lemma berikut.

Lemma 9
Suatu barisan fungsi $\{f_n\}$ pada himpunan $A \subseteq R$ konvergen ke suatu fungsi jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $x \in A$ ada bilangan asli $N_{\varepsilon,x}$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Bukti:
Pertidaksamaan di atas menunjukkan bahwa x berpengaruh terhadap n untuk memenuhi pertidaksamaan. Sehingga jelas bahwa dalam memenuhi pertidak samaan, n bergantung terhadap nilai x dan ε.
Selanjutnya, suatu barisan yang knvergen seragam hanya bergantung pada nilai ε dan berlaku untuk semua nilai x dalam interval. Keknvergenan seragam didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 10. *Barisan fungsi $\{f_n\}$ bernilai riil di $E \subseteq R$. Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi f di E, jika diberikan $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $x \in E$. Fungsi $f(x)$ merupakan nilai limit dari $f_n(x)$ untuk nilai $n \to \infty$.*

Akibat 11. *Barisan fungsi $\{f_n\}$ tidak konvergen seragam ke f di E jika dan hanya jika $\exists \varepsilon_0 > 0 \ni \nexists N$ yang memenuhi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ $\forall n \geq N_{\varepsilon_0}$, $\forall x \in E$.*

Bukti:
Sesuai dengan definisi bariasan konvergen seragam bahwa Barisan fungsi $\{f_n\}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi f di E, jika diberikan $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_\varepsilon$, $x \in E$. Fungsi $f(x)$ merupakan nilai limit dari $f_n(x)$ untuk nilai $n \to \infty$, diketahui bahwa jika diambil $\varepsilon > 0$ maka $\forall n \geq N_\varepsilon$ memenuhi pertidaksamaan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Jadi, jika diambil $\varepsilon > 0$ sehingga tidak ada $n \geq N_\varepsilon$ yang memenuhi pertidaksamaan $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ maka $f_n(x)$ dinyatakan tidak konvergen seragam.
Seperti halnya dalam barisan bilangan real, dalam barisan fungsi juga dikenal kriteria Cauchy dengan memperhatikan nilai mutlak dari selisih suku yang berdekatan sebagaimana disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 12 (Kriteria Cauchy)
Barsian fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f di E jika dan hanya jika diberikan $\varepsilon_0 > 0$ maka ada bilangan asli $N_\varepsilon \in N$ sedemikan sehingga $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, untuk semua $m, n \geq N_\varepsilon$; $x \in E$.

Bukti:
Misalkan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f di E. Diberikan $\varepsilon > 0 \Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} > 0$, barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f sedemikian sehingga

$|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. m merupakan bilangan asli juga dimana $m \geq N_\varepsilon$, berlaku $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Maka diperoleh

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |(f_m(x) - f(x)) + (f(x) - f_n(x))| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kemampuan dari kekonvergenan seragam dalam mempertahankan kekontinuan fungsi terdapat dalam teorema berikut.

Teorema 13
Misalkan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada suatu interval $I \subseteq R$. Jika f_n kontinu di $c \in I$ untuk tiap $n \in N$, maka f juga kontinu di c.

Bukti:
Ambil $\varepsilon > 0$, kemudian pilih $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan $x \in I$ berlaku $|fn(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Karena f_N kontinu di c, maka suatu interval $I_\delta(c) \subseteq I$ yang memuat c sedemikian sehingga untuk setiap $x \in I_\delta(x)$ berlaku $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi, untuk setiap $x \in I_\delta(c)$, kita mempunyai $|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Ini membuktikan bahwa f kontinu di c.

3. METODOLOGI

ini merupakan kajian teori mengenai kekonvergenan barisan fungsi yaitu ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam. Prosedur pada penelitian ini adalah menunjukkan hubungan dari kedua keknvergenan berdasarkan definisinya. Kemudian menganalisis sifat-sifat yang berlaku pada kedua kekonvergenan tersebut. Selanjutnya, menentukan sifat-sifat yang berlaku pada kekonvergenan pointwise sekaligus pada kekonvergenan seragam. Terakhir, akan ditunjukkan ekuivalensi kekonvergenan berdasarkan karakteristik barisan fungsi yang didapat dari sifat-sifat kekonvergenan barisan.

4. PEMBAHASAN

Hubungan keknvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam
Kekonvergenan seragam yang menyatakan limit barisan $\{fn\}$ yang berlaku untuk semua nilai x mengakibatkan kekonvergenan pointwise atau dengan kata lain, kekonvergenan pointwise merupakan syarat perlu untuk kekonvergenan seragam. Hal ini dapat dilihat dari definisi konvergen pointwise yang diperjelas dengan lemma 2.45 bahwa, Barisan $\{fn\} \in E \subseteq R$ konvergen pointwise ke suatu fungsi jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0$ dan $\forall x \in E, \exists N_{\varepsilon,x} \in N \ni \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pertidaksamaan ini menyatakan bahwa untuk memenuhi pertidaksamaan, n tidak hanya dipengaruhi oleh nilai ε, akan tetapi x juga berpengaruh dalam memenuhi pertidaksamaan. Kemudian menurut definisi konvergen seragam, Barisan $f_n(x) \in E \subseteq R$ konvergen seragam kesuatu fungsi di E, jika diberikan $\varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad x \in E$. Pertidaksamaan ini menunjukkan bahwa dalam memenuhi pertidaksamaan, hanya nilai ε yang berpengaruh terhadap n dan nilai ε berlaku untuk semua nilai x.
Penjelasan tersebut menunjukkan bahwa kekonvergenan pointwise memuat kekonvergenan seragam yang berarti suatu barisan $\{fn\}$ konvergen seragam jika dan hanya jika $\{fn\}$ konvergen pointwise dan ketika nilai dari keduanya ada maka nilainya sama.

Sifat-sifat kekonvergenan pointwise
Kekonvergenan pointwise memiliki kekurangan dalam hal kekontinuan. Hal tersebut mengindikasikan bahwa nilai limitnya dapat lebih dari satu. Hal ini disebabkan karena kekonvergenan tersebut dipengaruhi oleh nilai x sehinnga dapat menimbulkan nilai limit yang berbeda dalam suatu interval.

Kasus 14. Tentukan kekonvergenan barisan fungsi $f_n(x) = x^n; \; x \in [0,1]$.

Penyelesaian:
Fungsi $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$, untuk $x \in [0,1)$ dan $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 1$, untuk $x = 1$ yang berarti $\forall \varepsilon > 0, x \in E, \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ untuk $x \in [0,1)$ dan $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 1| = 0 < \varepsilon$

untuk $x = 1$. Secara umum diketahui bahwa Barisan fungsi $f_n(x) = x^n$ konvergen pointwise di $x \in [0,1]$ yaitu konvergen pointwise ke 0 untuk $x \in [0,1)$ dan konvergen pointwise ke 1 untuk $x = 1$.
Suatu barisan fungsi dikatakan terbatas apabila barisan tersebut terbatas keatas dan terbatas kebawah atau $c \leq f_n \leq g$. Selanjutnya terema keterbatasan barisan dpat berlaku pada kekonvergenan pointwise di $[a, b]$.

Teorema 15. *barisan fungsi $f_n(x)$ yang konvergen pointwise adalah barisan terbatas.*

Bukti:
andaikan $\{fn\}$ konvergen ke f dan ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $K_{\varepsilon,x} = K(1)$ sedemikian hingga berlaku $|f_n - f| < 1$ untuk semua $n \geq K_{\varepsilon,x}$. Jika digunakan ketaksamaan segitiga dengan $n \geq K_{\varepsilon,x}$ maka didapat

$$|f_n| = |f_n - f + f| \leq |f_n - f| + |f| < 1 + |f|$$

Jika dipilih

$$M = \sup\{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_{k-1}|, 1 + |f|\}$$

Maka itu menyatakan bahwa $|f_n| \leq M$ untuk semua $n \in N_{\varepsilon,x}$

Kasus 16:
Tentukan kekonvergenan barisan fungsi $f_n(x) = nx$ untuk $0 \leq x < \frac{1}{n}$ dan
$f_n(x) = 1$ untuk $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. Dapat dilihat bahwa $f_n(x)$ terbatas $0 \leq f_n \leq 1$ dan naik monoton $f_n \leq f_{n+1}$ untuk setiap n. Fungsi $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = 1$, untuk $x \in (0,1]$ dan $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = 0$, untuk $x = 0$ yang berarti $\forall\varepsilon > 0, x \in E, \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| = |nx - 1| \leq 0 < \varepsilon$ untuk $x \in (0,1]$ dan $|f_n(x) - f(x)| = |nx - 0| = 0 < \varepsilon$ untuk $x = 0$. Secara umum diketahui bahwa Barisan fungsi $f_n(x) = nx$ konvergen pointwise di $x \in [0,1]$ yaitu konvergen pointwise ke 1 untuk $x \in (0,1]$ dan konvergen pointwise ke 0 untuk $x = 0$.

Sifat-sifat kekonvergenan seragam
Kekonvergenan seragam merupakan kekonvergenan barisan fungsi yang mirip dengan kekonvergenan barisan bilangan real. hal itu dapat dilihat dengan berlakunya teorema dalam barisan bilangan real pada kekonvergenan tersebut seperti ketunggalan nilai limit dan keterbatasan barisan konvergen.

Teorema 17. *Jika barisan $\{fn\}$ konvergen seragam, maka limit barisan $\{fn\}$ tunggal.*

Bukti:
Andaikan barisan $\{fn\}$ konvergen ke f dan g dengan $f \neq g$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $K_\varepsilon{}'$ sedemikian sehingga $|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K_\varepsilon{}'$ dan terdapat $K_\varepsilon{}''$ sedemikian sehingga $|f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K_\varepsilon{}''$. Dipilih $K_\varepsilon = \max\{K_\varepsilon{}', K_\varepsilon{}''\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq K_\varepsilon$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f - g| &= |f - f_n + f_n - g| \\ &= |f - f_n| + |f_n - g| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $f - g = 0$ yang berarti $f = g$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.
Ketunggalan nilai limit pada barisan fungsi yang konvergen seragam merupakan indikasi dari kekontinuan nilai $f(x)$ yang merupakan limit dari barisan $f_n(x)$.

Teorema 18. *Jika barisan $\{fn\}$ konvergen seragam, maka $\{fn\}$ terbatas.*

Bukti:
Diketahui $\{fn\}$ konvergen ke f dan ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $K_\varepsilon = K(1)$ sedemikian hingga berlaku $|f_n - f| < 1$ untuk semua $n \geq K_\varepsilon$. Jika digunkan ketaksamaan segitiga dengan $n \geq K_\varepsilon$ maka didapat

$$|f_n| = |f_n - f + f| \leq |f_n - f| + |f| < 1 + |f|$$

Jika dipilih

$$M = \sup\{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_{k-1}|, 1 + |f|\}$$

Maka itu menyatakan bahwa $|f_n| \leq M$ untuk semua $n \in N_\varepsilon$
Sebagaimana dalam barisan bilangan real, barisan $\{fn\}$ dikatakan naik monoton jika $f_n \leq f_{n+1}$ dan barisan $\{fn\}$ dikatakan turun monoton jika $f_n \geq f_{n+1}$. Sebuah barisan $\{fn\}$ dikatakan monoton apabila $\{fn\}$ monoton naik atau monoton turun. Suatu barisan $\{fn\}$ yang monoton naik atau monoton turun dan juga

terbatas belum tentu konvergen seragam. Hal ini disebakan barisan $\{fn\}$ belum tentu memiliki supremum atau infimum.

Teorema 19. *Jika barisan $\{fn\}$ monoton dan mempunyai supremum/infimum maka barisan $\{fn\}$ konvergen seragam ke supremum/infimumnya.*

Bukti:

Misalkan $A = \{f_n : n \in N_\varepsilon\}$ dan $s = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K_\varepsilon \in N_\varepsilon$ sedemikian hingga $s - \varepsilon < f_k \leq s$. Karena $\{fn\}$ naik monoton, maka untuk $n \geq K_\varepsilon$ berlaku

$$s - \varepsilon < f_k \leq f_n \leq s < s + \varepsilon$$

Atau

$$s - \varepsilon < f_n < s + \varepsilon \Leftrightarrow |f_n - s| < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\{fn\}$ konvergen ke $s = \sup\{f_n : n \in N_\varepsilon\}$.

Selanjutnya, Barisan $\{fn\}$ dikatakan naik seragam (uniformly nondecreasing) jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $\forall n \geq N$ berlaku $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) < \varepsilon$. Barisan $\{fn\}$ dikatakan turun seragam (uniformly nonincreasing) jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $\forall n \geq N$ berlaku $0 \leq f_n(x) - f_{n+1}(x) < \varepsilon$.

Pembahasan terakhir untuk kekonvergenan seragam yaitu teorema yang menjamin suatu barisan fungsi $\{fn\}$ konvergen seragam ke fungsi f yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 20. *Diberikan barisan $f_n(x)$ terbatas. Jika $f_n(x)$ monoton seragam maka $f_n(x)$ memiliki supremum/infimum. Lebih jauh, barisan $f_n(x)$ konvergen ke supremum/infimumnya.*

Bukti:

Misalkan $f_n(x)$ terbatas dan monoton seragam (naik). Diambil $\varepsilon > 0$ terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $\forall n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Karena $f_n(x)$ terbatas pada interval $[a, b]$ maka $f_n(x)$ terbatas di R. Menurut sifat lengkap, maka terdapat $f(x) = \sup f_n(x)$ untuk $\forall x \in [a, b]$. Berdasarkan Teorema 4.3, maka $f_n(x)$ konvergen ke supremumnya.Bukti untuk turun seragam yang konvergen keinfimumnya serupa.

Sifat-sifat yang mengakibatkan ekuivalensi pada kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam

Bagian meupakan pembahasan mengenai sifat-sifat barisan konvergen seragam yang dapat mengakibatkan terjadinya ekuivalensi dengan kekonvergenan poitwise. Pembuktian teorema selanjutnya digunakan pemisalan konvergen yang berarti barisan fungsi konvergen pointwise sekaligus konvergen seragam. Berikut ini dibahas teorema yang menjadi syarat terjadinya ekuivalensi disajikan dalam Teorema 4.4.1 dan Teorema 4.4.2

Teorema 21. *Jika barisan $\{fn\}$ konvergen, maka limit barisan $\{fn\}$ tunggal.*

Bukti:

Andaikan barisan $\{fn\}$ konvergen ke f dan g dengan $f \neq g$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $K'_{\varepsilon,x} = K_\varepsilon'$ sedemikian sehingga $|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq (K'_{\varepsilon,x} = K_\varepsilon')$ dan terdapat $K_{\varepsilon,x}" = K_\varepsilon"$ sedemikian sehingga $|f_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq (K_{\varepsilon,x}" = K_\varepsilon")$. Dipilih $(K_{\varepsilon,x} = K_\varepsilon) = \max\{(K'_{\varepsilon,x} = K_\varepsilon'), (K_{\varepsilon,x}" = K_\varepsilon")\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq (K_{\varepsilon,x} = K_\varepsilon)$ =diperoleh

$$\begin{aligned} |f - g| &= |f - f_n + f_n - g| \\ &= |f - f_n| + |f_n - g| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan juga berlaku untuk semua x, maka $f - g = 0$ yang berarti $f = g$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

Ketunggalan nilai limit dapat menjadi indikasi terjadinya ekuivalensi dalam kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam hal tersebut sesuai dengan Teorema 4.3.1 tentang ketunggalan nilai limit dan akan terjadi barisan fungsi konvegen poitwise ketikan barisan fungsi kovergen seragam sebagaimana diketahui bahwa kekonvergenan poitwise merupakan syarat perlu terjadinya kekonvergenan seragam.

Teorema 22. Jika barisan $\{fn\}$ konvergen, maka $\{fn\}$ terbatas

Bukti:

Diketahui $\{fn\}$ konvergen ke f dan ambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat bilangan asli $(K_\varepsilon = K_{\varepsilon,x}) =$

$K(1)$ sedemikian hingga berlaku $|f_n - f| < 1$ untuk semua $n \geq (K_\varepsilon = K_{\varepsilon,x})$. Jika digunkan ketaksamaan segitiga dengan $n \geq (K_\varepsilon = K_{\varepsilon,x})$ maka didapat

$$|f_n| = |f_n - f + f| \leq |f_n - f| + |f| < 1 + |f|$$

Jika dipilih

$$M = \sup\{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_{k-1}|, 1 + |f|\}$$

Maka itu menyatakan bahwa $|f_n| \leq M$ untuk semua $n \in (N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x})$.

Kasus 23:
Tunjukkan keterbatasan barisan konvergen $f_n(x) = \frac{x}{x+n}; x \in [0, a]$.

Penyelesaian:

Cukup jelas bahwa $f_n(x)$ konvergen (pointwise dan seragam) ke 0 untuk $x \in [0, a]$.

$f_n(x)$ monoton turun dengan $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ dan terbatas dengan $0 \leq f_n(x) \leq a$.

Dapat dilihat bahwa suatu barisan yang konvergen pointwise sekaligus konvergen seragam merupakan barisan terbatas, akan tetapi ketebatasan dari barisan $\{fn\}$ tidak memastikan terjadinya ekuivalensi. Jadi, keterbatasan suatu barisan merupakan syarat ekuivalennya kedua kekonvergenan tersebut. Hal ini dapat diketahui dari barisan fungsi yang konvergen pointwise merupakan barisan terbatas yang pada dasarnya barisan fungsi kovergen pointwise belum tentu barisan tersebut konvergen seragam.
Selanjutnya, sifat yang mengindikasikan terjadinya ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam yaitu kepemilikan supremum atau infimum disajikan dalam Teorema 4.4.3 sebagai berikut.

Teorema 24. *Jika barisan $\{fn\}$ naik monoton dan mempunyai supremum/infimum maka barisan $\{fn\}$ konvergen ke supremum/infimumnya.*

Bukti:
Misalkan $A = \{f_n : n \in (N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x})\}$ dan $s = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $(K_\varepsilon = K_{\varepsilon,x}) \in (N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x})$ sedemikian hingga $s - \varepsilon < f_k \leq s$. Karena $\{fn\}$ naik monoton, maka untuk $n \geq (K_\varepsilon = K_{\varepsilon,x})$ berlaku

$$s - \varepsilon < f_k \leq f_n \leq s < s + \varepsilon$$

Atau

$$s - \varepsilon < f_n < s + \varepsilon \Leftrightarrow |f_n - s| < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa $\{fn\}$ konvergen ke $s = \sup\{f_n : n \in (N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x})\}$.
Pembuktian untuk infimum serupa.

Kasus 25:
Tentukan kekonvergenan barisan fungsi $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right); \quad x \in [0,1]$.

Penyelesaian:
Fungsi $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n}) = 1$, untuk $x \in [0,1]$ yang berarti $\forall \varepsilon > 0, x \in E, \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| = |(1 + \frac{x}{n}) - 1| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ yang berarti berdasarkan ε dan x yang diberikan barisan $f_n(x)$ konvergen pointwise ke 1 pada interval [0,1] dan barisan fungsi $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})$ konvergen seragam menuju $f(x) = 1$ pada $x \in [0,1]$ karena nilai $\left|(1 + \frac{x}{n}) - 1\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, yang berarti jika diambil sebarang nilai $\varepsilon > 0$ ada nilai $n \geq N_\varepsilon$sedemikian sehingga $\left|\frac{x}{n} - 1\right| < \varepsilon$ berlaku untuk semua $x \in [0,1]$. Disini dapat dilhat bahwa supremum dari f_n adalah barisan monoton turun, selanjutnya f_n memiliki infimum yaitu 1 dan f_n konvergen ke $f(x) = 1$. Sehingga jelas bahwa f_n konvergen ke infimumnya.
Selanjutnya, dijelaskan sifat terakhir yang menjamin ekuivalensi konvergen pointwise dan konvergen seragam dalam teorema berikut ini.

Teorema 26. *Diberikan barisan $\{fn\}$ terbatas. Jika $\{fn\}$ monton seragam maka $\{fn\}$ memiliki supremum/infimum. Lebih jauh, barisan $\{fn\}$ konvergen ke supremum/infimumnya.*

Bukti:
Diberikan barisan $f_n(x)$ terbatas dan naik seragam. Diambil $\varepsilon > 0$ maka terdapat $(N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x}) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk $\forall n \geq (N_\varepsilon = N_{\varepsilon,x})$ berlaku

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) < \varepsilon, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Karena $f_n(x)$ terbatas pada $[a, b]$ maka $f_n(x)$ terbatas di R. Menurut sifat lengkap, terdapat $f(x) = \sup f_n(x)$ untuk $\forall x \in [a, b]$.

Berdasarkan Teorema 4.7, maka $f_n(x)$ konvergen ke supremumnya.
Pembuktian untuk turun seragam yang kovergen ke infimumnya serupa.
Ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam dari suatu barisan fungsi dijamin terjadi jika barisan fungsi naik seragam atau turun seragam.

Ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan seragam berdasarkan karakteristik barisan

Sifat barisan fungsi telah dibahas pada bagian-bagian sebelumnya berdasarkan teorema konvergensi barisan. Pada bagian ini ditunjukkan karakteristik barisan fungsi yang kovergen berdasarkan karakteristik barisan fungsi yang telah dibahas.

Kasus 27:

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi $f_n(x)$ yang didefinisikan $f_n(x) = nx$ untuk $0 \leq x < \frac{1}{n}$ dan $f_n(x) = 1$ untuk $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ dengan $x \in [0,1]$.

Penyelesaian:

Barisan $f_n(x)$ dinyatakan konvergen pointwise karena memiliki karakteristik berikut:

a. Barisan $f_n(x)$ monoton dimana $f_n(x)$ naik monoton $f_n \leq f_{n+1}$ untuk setiap $n \geq N$.
b. $f_n(x)$ terbatas sebab $0 \leq f_n \leq 1$ untuk setiap $n \geq N$.
c. Limit barisannya ada yaitu, $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = 1,\ x \in (0,1]$ dan $f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = 0,\ x = 0$.

Berdasarkan karakteristik dari barisan monoton dan terbatas maka $f_n(x)$ konvergen pointwise di $x \in [0,1]$. Jika $f_n(x)$ konvergen pointwise ke 1 untuk $x \in (0,1]$ dan konvergen pointwise ke 0 untuk $x = 0$ maka limitnya ada.
Barisan $f_n(x)$ dinyatakan tidak konvergen seragam karena tidak memiliki keseluruhan karakteristik barisan fungsi seragam. Berikut ini karakteristik barisan fungsi konvergen seragam, yaitu:

a. Barisan $f_n(x)$ monoton dimana $f_n(x)$ naik monoton $f_n \leq f_{n+1}$ untuk setiap $n \geq N$.
b. $f_n(x)$ terbatas sebab $0 \leq f_n \leq 1$ untuk setiap $n \geq N$.
c. $f_n(x)$ memiliki supremum.
d. $f_n(x)$ naik seragam jika $\forall\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $0 \leq f_{n+1} - f_n < \varepsilon$.

Sehingga berdasarkan karakteristik kekonvergenan seragam, $f_n(x)$ tidak konvergen seragam di $x \in [0,1]$ karena tidak memenuhi (c) dan (d)

Kasus 28:

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$; $x \in [0,1]$.

Penyelesaian:

Barisan $g_n(x)$ dinyatakan konvergen pointwise karena memiliki karakteristik berikut:

a. Barisan $f_n(x)$ monoton dimana $g_n(x)$ monoton turun $g_n \leq g_{n+1}$ untuk setiap $n \geq N$.
b. $g_n(x)$ terbatas sebab $0 \leq g_n \leq 1$ untuk setiap $n \geq N$.
c. Limit barisannya ada yaitu, $g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0,\ x \in [0,1]$.

Berdasarkan karakteristik keterbatasan dari barisan monoton maka diketahui bahwa $g_n(x)$ konvergen pointwise di $x \in [0,1]$. jika $g_n(x)$ konvergen pointwise ke 0 untuk $x \in [0,1]$ maka limitnya ada.
Barisan $g_n(x)$ dinyatakan konvergen seragam karena memiliki karakteristik kekonvergenan seragam. Berikut ini karakteristik barisan fungsi konvergen seragam, yaitu:

a. Barisan $g_n(x)$ monoton dimana $g_n(x)$ naik monoton $g_n \leq g_{n+1}$ untuk setiap $n \geq N$
b. $g_n(x)$ terbatas sebab $0 \leq g_n \leq 1$ untuk setiap $n \geq N$.
c. $g_n(x)$ monoton turun dan memiliki infimum yaitu 0.
d. $g_n(x)$ turun seragam sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n \geq N$ berlaku $0 \leq g_n - g_{n+1} < \varepsilon$.

Sehingga berdasarkan karakteristik kekonvergenan $g_n(x)$ konvergen seragam ke 0 di $x \in [0,1]$.
Dengan demikian, berdasarkan Kasus 27 dan Kasus 28 memberikan gambaran tentang

karakteristik barisan konvergen pointwise dan kovergen seragam serta ekuivalensinya pada interval [a,b]. suatu barisan fungsi akan konvergen pointwise apabila barisan tersebut adalah barisan monoton dan terbatas. Sedangkan barisan fungsi akan konvergen seragam apabila barisan tersebut adalah barisan monoton, terbatas, memiliki supremum atau infimum dan turun seragam atau naik seragam. Sehingga berdasarkan karakteristik yang harus dipenuhi suatu barisan fungsi, dapat disimpulkan bahwa ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam pada interval [a,b] adalah barisan fungsi f_n terbatas dan monoton seragam. Oleh karena itu, jika barisan fungsi f_n konvergen seragam maka barisan fungsi f_n konvergen pointwise.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa karakteristik yang harus dimiliki suatu barisan fungsi agar terjadi ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam yaitu barisan fungsi f_n terbatas dan monoton seragam pada interval [a,b].

6. DAFTAR PUSTAKA

[1] Alwi, Wahidah.2012 "*Analisis Real: Landasan Berfikir Formal dalam Matematika*". Makassar: Alauddin Press

[2] Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. "*Introduction to Real Analysis*". 3th. New York : John Wiley and Sons.

[3] Goldberg, Richard R. 1976. "*Method of Reall Analysis*".New York : John Wiley and Sons.

[4] Gunawan, Hendra. 2009. "*Pengantar Analisis Real*". Institut Teknologi Bandung

[5] Parhusip, Hanna Arini. 2013."*Analisa Real*". Salatiga: Tisara Grafika.

[6] Riyanto, M. Zaky. 2010. "*Pengantar Analisis Real I* ".Universitas Ahmad Dahlan.

[7] Setiawan, Restu Puji & Hartono. 2107 " *Analisis Kekonvergenan pada Barisan Fungsi*", Jurnal Matematika Vol 6 No 1 Tahun 2017 Universitas Negeri Yogyakarta.

[8] Trench, William F. 2013. "*Introduction to Real Analysis*". Trinity University.

[9] Ubaidillah, Firdaus, Soeparna Darmawijaya dan Ch. Rini Indrati. (2013). "*Kekonvergenan Barisan didalam Ruang Fungsi Kontinu C[a,b]*".Jurnal CAUCHY, Vol. 2 No. 4, halaman 184-188.