

# Metode Konjugat Gradien Hibrid Baru: Metode Hs-Cd untuk Menyelesaikan Masalah Optimasi Tak Berkendala

T. Murdani Saputra

Universitas Syiah Kuala, tmurdanisaputra@unsyiah.ac.id

Bib Paruhum Silalahi

Institut Pertanian Bogor

Sugi Guritman

Institut Pertanian Bogor

**ABSTRAK**, Metode konjugat gradien adalah salah satu metode yang efektif dalam menyelesaikan permasalahan optimasi tak-berkendala dan metode ini juga termasuk salah satu metode iteratif. Pada tulisan ini, peneliti mengusulkan metode konjugat gradien hibrid baru yaitu metode new hybrid 4 yang merupakan gabungan antara metode Hestenes dan Stiefel – *ConjugateDescent*, dimana metode tersebut diusulkan berdasarkan ide dari metode yang telah diusulkan sebelumnya yaitu metode Polak, Ribière dan Polyak - Fletcher dan Reeves atau metode NH1, metode Hestenes dan Stiefel – Dai dan Yuan atau metode NH2 dan metode Liu dan Storey – *ConjugateDescent* (NH3). Peneliti mengusulkan metode tersebut dengan menggabungkan antara metode HS dan CD, dimana metode tersebut memiliki kekurangan masing-masing. Dalam penelitian ini, peneliti membandingkan hasil numerik antara metode baru yaitu Metode HS-CD (NH4) dengan metode-metode sebelumnya serta membuktikan bahwa memenuhi sifat konvergen global dan memenuhi kondisi *descent* setiap iterasinya. Hasil numerik menunjukkan bahwa metode baru adalah sangat efisien dalam menyelesaikan fungsi nonlinear tak-berkendala. Metode tersebut juga terbukti memenuhi sifat konvergen global menggunakan kondisi Wolfe serta memenuhi kondisi *descent* di setiap iterasinya..

**Kata Kunci:** metode konjugat gradien, arah descent, konvergen global

## 1. PENDAHULUAN

Metode konjugat gradien pertama kali diperkenalkan oleh Hestenes dan Stiefel pada tahun 1952 untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, berikut masalah optimasi tanpa kendala:

$$\min f(x), x \in R^n \quad (1.1)$$

dengan  $f: R^n \rightarrow R$  merupakan fungsi turunan kontinu dan gradien dinotasikan  $g$ .

Persamaan (1.1) secara iteratif pada metode konjugat gradien dapat diselesaikan dengan menggunakan bentuk:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Dengan  $x_k$  adalah proses iteratif,  $\alpha_k$  adalah ukuran langkah yang ditentukan dengan menggunakan *line search* dan  $d_k$  adalah pencarian arah. Untuk ukuran langkah  $\alpha_k$  diperoleh dengan menggunakan *exact* atau *inexact line search* dimensi satu. Jika yang digunakan *exact line search* maka nilai  $\alpha_k$  diperoleh dengan bentuk berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha d_k) \quad (1.3)$$

dan untuk kasus *inexact line search* yang digunakan mencari ukuran langkah  $\alpha_k$  adalah kondisi armijo dan kondisi *curvature*, adapun kondisi sebagai berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \quad (1.4)$$
$$\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma \nabla f(x_k)^T d_k$$

dengan  $0 < \delta < \sigma < 1$  [1]. Kondisi armijo dan kondisi *curvature* juga dikenal dengan kondisi Wolfe. Selain kondisi Wolfe, ada juga kondisi *strong Wolfe* yang digunakan untuk memperoleh ukuran langkah  $\alpha_k$  dan bentuk kondisinya sebagai berikut:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k \quad (1.5)$$
$$\|\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k\| \leq -\sigma \nabla f(x_k)^T d_k$$

dengan  $0 < \delta < \sigma < 1$  [1]. Dalam penelitian ini yang digunakan untuk mencari ukuran langkah  $\alpha_k$  adalah kondisi *strong Wolfe*. Pencarian arah  $d_k$  dalam metode konjugat gradien ini menggunakan aturan sebagai berikut:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & \text{untuk } k = 0 \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & \text{untuk } k > 0 \end{cases} \quad (1.6),$$

dengan  $g_k$  adalah gradien dari  $f$  di  $x_k$ , dan  $\beta_k$  merupakan skalar. Terdapat beberapa bentuk

skalar yang dikenal diantaranya adalah metode HS [2], metode FR [3], metode PRP [4, 5], metode CD[6], metode LS [7], Metode DY [8]. Adapun metode-metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{HS} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{d_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}, \beta_k^{FR} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{\|\mathbf{g}_{k-2}\|^2}, \beta_k^{PRP} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2}$$

$$\beta_k^{CD} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{d_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \beta_k^{LS} = -\frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{y}_{k-1}}{d_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \beta_k^{DY} = \frac{\|\mathbf{g}_k\|^2}{d_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}$$

dengan  $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}$  dan  $\|\cdot\|$  merupakan norm vektor Euclid.

Metode–metode diatas memiliki kelebihan dan kekurangan pada proses kinerja komputasi dan kekonvergenan global. Metode PRP, metode HS dan metode LS merupakan metode yang kinerja komputasinya lebih baik, namun pada sifat konvergensi global tidak terpenuhi untuk algoritmanya. Disisi lain, metode Fletcher-Reeves (FR), metode Conjugate Descent (CD) dan metode Dai-Yuan (DY) mempunyai sifat konvergensi yang tercapai pada algoritmanya, tetapi kinerja komputasinya kurang efisien. Beberapa metode digabungkan untuk memperoleh hasil optimasi lebih baik dan memenuhi sifat konvergensi global.

Zhang dan Zhou mengusulkan dua metode konjugat gradien hibrid baru, yang dikenal dengan metode NH1 dan metode NH2 [9]. Metode NH1 diusulkan dari pergantian bentuk FR pada metode MFR [10] digantikan dengan bentuk metode hibrid PRP-FR atau metode H1 [11]. Adapun metode NH1 sebagai berikut:

$$\beta_k^{H1} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{PRP}, \beta_k^{FR} \} \} \quad (1.7)$$

MFR:

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{FR} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left( 1 + \beta_k^{FR} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{FR} d_{k-1}, \quad (1.8)$$

dengan menggantikan  $\beta_k^{FR}$  (1.8) dengan  $\beta_k^{H1}$  (1.7) sehingga diperoleh:

NH1:

$$d_k = -\left( 1 + \beta_k^{H1} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H1} d_{k-1} \quad (1.9)$$

Hal yang sama juga dilakukan untuk metode NH2. Metode NH2 diusulkan dari pergantian bentuk DY dalam metode MDY [12] digantikan dengan bentuk metode hibrid HS-DY atau metode H2 [13]. Adapun metode NH2 sebagai berikut:

$$\beta_k^{H2} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{DY} \} \} \quad (1.10)$$

MDY:

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left( 1 + \beta_k^{DY} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{DY} d_{k-1} \quad (1.11)$$

dengan menggantikan  $\beta_k^{DY}$  (1.11) dengan  $\beta_k^{H2}$  (1.10) sehingga diperoleh:

NH2:

$$d_k = -\left( 1 + \beta_k^{H2} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H2} d_{k-1} \quad (1.12)$$

Hal yang sama juga dilakukan oleh [14] dengan mengusulkan metode baru metode konjugat gradien yaitu metode hibrid LS-CD, MCD dan NH3 [14]. Adapun metode NH3 diperoleh sebagai berikut:

$$\beta_k^{H3} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{LS}, \beta_k^{CD} \} \} \quad (1.13)$$

MCD :

$$d_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k^{CD} d_{k-1} - \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \mathbf{g}_k$$

$$= -\left( 1 + \beta_k^{CD} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{CD} d_{k-1} \quad (1.14)$$

dengan menggantikan  $\beta_k^{CD}$  (1.14) dengan  $\beta_k^{H3}$  (1.13) sehingga diperoleh:

NH3:

$$d_k = -\left( 1 + \beta_k^{H3} \frac{\mathbf{g}_k^T d_{k-1}}{\|\mathbf{g}_{k-1}\|^2} \right) \mathbf{g}_k + \beta_k^{H3} d_{k-1} \quad (1.15)$$

Metode – metode (MFR, MDY, NH1 dan NH2) memenuhi  $\mathbf{g}_k^T d_k = -\|\mathbf{g}_k\|^2$ , maka metode tersebut merupakan metode *descent* dan metode tersebut bebas menggunakan *line search*. Menunjukkan proses yang efisien dalam komputasi sangat efisiensi kedua metode

tersebut dibuktikan serta memenuhi sifat kekonvergenan global.

Sedangkan untuk metode MCD dan metode NH3 juga memenuhi  $g_k^T d_k = -\|g_k\|^2$ , dimana metode-metode tersebut memenuhi kondisi descent. Metode menunjukkan bahwa ketiga metode tersebut efisien dalam proses komputasi dan membuktikan metode-metode tersebut memenuhi sifat kekonvergenan global.

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan cara mendapatkan metode konjugat gradien yang dilakukan oleh [10] serta [14]. [10] menggunakan metode H2 [8] dan metode MDY [10] untuk mengusulkan metode NH2 dan [14] juga melakukan hal yang sama yaitu mengusulkan 3 metode baru metode H3, metode MCD dan metode NH3. Berdasarkan metode yang diusulkan oleh [10] serta [14], maka dalam penelitian ini diusulkan metode konjugat gradien hibrid baru yaitu metode H4, metode NH4. Adapun modifikasi metodenya sebagai berikut:

$$\beta_k^{H4} \triangleq \max \{0, \min \{ \beta_k^{HS}, \beta_k^{CD} \} \} \quad (1.16)$$

dimana metode H4 merupakan metode hibrid HS-CD.

Berdasarkan bentuk metode MCD, maka metode baru yang diusulkan sebagai berikut:

$$NH4: d_k = - \left( 1 + \beta_k^{H4} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right) g_k + \beta_k^{H4} d_{k-1} \quad (1.17)$$

dan bentuk (1.18) memenuhi persamaan

$$g_k^T d_k = -\|g_k\|^2, \quad (1.18)$$

dimana metode NH4 memenuhi kondisi descent.

## 2. ALGORITMA DAN KONVERGEN GLOBAL

### Algoritma Metode NH4

Langkah 0: Diberikan titik awal  $x_0 \in \mathbb{R}^n, 0 < \varepsilon \leq 1, 0 < \delta < \frac{1}{2}$  dan  $\delta < \sigma < 1$ .  
Tetapkan  $d_0 = -g_0, k := 0$ .

Langkah 1: Jika  $\|g_k\| < \varepsilon$ , berhenti; lanjut ke langkah berikutnya.

Langkah 2: Hitung ukuran langkah  $\alpha_k$  menggunakan kondisi Wolfe (1.4).

Langkah 3: Misalkan  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ . Jika  $\|g_{k+1}\| < \varepsilon$ , maka stop.

Langkah 4: Hitung pencarian arah  $d_k$  (1.17).

Langkah 5: Beri nilai  $k = k + 1$ , dan kembali ke langkah 2.

### Analisis kekonvergenan global metode hibrid baru

#### Asumsi A

Untuk menganalisis kekonvergenan metode NH4 diperlukan beberapa asumsi dasar, berikut asumsinya:

1. Fungsi  $f$  terbatas di bawah level set  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\}$  terbatas;  $x_1$  adalah titik awal.
2. Gradien dari fungsi objektif memenuhi kontinu Lipschitz, yaitu terdapat  $L > 0$  sedemikian sehingga untuk semua  $x, y \in \Omega$  berlaku  $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$ .

Berdasarkan asumsi 1 dan 2 pada fungsi  $f$ , maka asumsi di atas diperlukan untuk pembuktian lemma berikut ini:

**Lemma 2.1** Andaikan asumsi A berlaku. Berdasarkan bentuk  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  dan persamaan (1.6), dimana  $d_k$  memenuhi kondisi descent dan  $\alpha_k$  merupakan ukuran langkah yang ditentukan dengan menggunakan kondisi Wolfe(1.4), maka:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty \quad (2.1)$$

Dari lemma 2.1 dan (1.18) untuk metode NH4 menggunakan kondisi Wolfe(1.4), maka secara mudah diperoleh;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|g_k\|^4}{\|d_k\|^2} < +\infty.$$

**Lemma 2.2** Misalkan  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  dihasilkan oleh algoritma 1, maka pencarian arah  $d_k$  (1.17) memenuhi kondisi descent

$$d_k^T g_k = -\|g_k\|^2, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.2)$$

**Bukti:**

misalkan  $\beta_k^{H4} = \beta_k^*$ ,  $\theta_k = (1 + \beta_k^* \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2})$  untuk

$$d_0 = -g_0$$

$$\begin{aligned} g_0^T d_0 &= -g_0^T g_0 \\ &= -\|g_0\|^2 \end{aligned}$$

jadi, diperoleh untuk  $k = 0$

untuk  $k \geq 1$ , sehingga

$$d_k = -\theta_k g_k + \beta_k^* d_{k-1},$$

untuk  $\beta_k^{H4} = \beta_k^*$

$$\begin{aligned} d_k &= -(1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k + \beta_k^* d_{k-1} \\ &= \beta_k^* d_{k-1} - (1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k \end{aligned}$$

kalikan kedua ruas dengan  $g_k^T$ , sehingga

$$\begin{aligned} g_k^T d_k &= \beta_k^* g_k^T d_{k-1} - (1 + \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}) g_k^T g_k \\ &= \beta_k^* g_k^T d_{k-1} - \|g_k\|^2 - \beta_k^* \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2} \|g_k\|^2 \\ g_k^T d_k &= -\|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk semua  $k \geq 1$  arah pencarian  $d_k$  menurun (*descent*).

### Konvergen global metode NH4

**Teorema 1** Misalkan asumsi A berlaku dan  $\{x_k\}$ ,  $d_k$  dihasilkan dari metode NH4. Jika ukuran langkah  $\alpha_k$  ditentukan dengan kondisi Wolfe(1.4) maka:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \tag{2.3}$$

**Bukti:**

Menggunakan pembuktian kontradiksi. Andaikan (2.3) tidak terpenuhi, maka ada konstanta  $\varepsilon > 0$  yang mana:

$$\|g_k\| \geq \varepsilon \forall k. \tag{2.4}$$

$$\beta_k^{H4} g_k^T d_{k-1} = h_k \|g_k\|^2 - \|g_k\|^2, \tag{2.5}$$

dimana  $h_k = 1 + \beta_k^{H4} \frac{g_k^T d_{k-1}}{\|g_k\|^2}$

dari bentuk (1.17) dan mengkuadratkan kedua ruas, sehingga:

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 &= \|\beta_k^{H4} d_{k-1} - h_k g_k\|^2 \\ &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2h_k \beta_k^{H4} d_{k-1}^T g_k + h_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan mensubstitusi bentuk (2.5) ke persamaan (2.6), sehingga didapat:

$$\begin{aligned} \|d_k\|^2 &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2h_k (h_k \|g_k\|^2 - \|g_k\|^2) \\ &\quad + h_k^2 \|g_k\|^2 \\ \|d_k\|^2 &= (\beta_k^{H4})^2 \|d_{k-1}\|^2 + 2h_k \|g_k\|^2 - h_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

bagi kedua ruas persamaan (2.7) dengan  $(g_k^T d_k)^2$

dan substitusi  $g_k^T d_k = -\|g_k\|^2$  sehingga:

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} = (\beta_k^{H4})^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \tag{2.8}$$

karena  $0 < \beta_k^{H4} < \beta_k^{CD}$  dan definisi  $\beta_k^{CD} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}$

sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} &\leq (\beta_k^{CD})^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &= \left( \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2} \right)^2 \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &\quad - \frac{2h_k}{g_k^T d_k} - \frac{h_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} - \frac{1}{\|g_k\|^2} (h_k^2 + 2h_k + 1 - 1) \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} - \frac{(h_k + 1)^2}{\|g_k\|^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \\ &\leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \\ &= \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

dari lemma 2.2 dimana  $g_0^T d_0 = -\|g_0\|^2$  untuk  $k = 0$

$$\frac{\|d_1\|^2}{(g_1^T d_1)^2} \leq \frac{\|d_0\|^2}{(g_0^T d_0)^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} = \sum_{i=0}^1 \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.10}$$

$$\frac{\|d_2\|^2}{(g_2^T d_2)^2} \leq \frac{\|d_1\|^2}{(g_1^T d_1)^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2}$$

$$\leq \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2}$$

$$= \sum_{i=0}^2 \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.11}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2}$$

$$\leq \frac{1}{\|g_0\|^2} + \frac{1}{\|g_1\|^2} + \frac{1}{\|g_2\|^2} + \dots + \frac{1}{\|g_k\|^2}$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.12}$$

jadi

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \tag{2.13}$$

diketahui  $\|g_k\| \geq \varepsilon$  maka

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \leq \frac{k+1}{\varepsilon^2} \tag{2.14}$$

dari persamaan terakhir berimplikasi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} \geq \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \pm\infty \tag{2.15}$$

kontradiksi dengan (2.1) sehingga  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0$  terbukti.

### 3. PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan dilakukan perbandingan hasil numerik antara metode konjugat gradien hibrid yaitu metode NH1, metode NH2, metode NH3, metode NH4. Ada beberapa parameter yang digunakan untuk mencari hasil numerik, diantaranya yaitu: batas toleransi perhentian  $\varepsilon$ , konstanta pada kondisi

Wolfe yaitu konstanta  $\mu, \delta$  dan ukuran langkah  $\alpha_k$ . Untuk batas toleransi dipakai  $\varepsilon = 10^{-6}$ , konstanta  $\mu = 0.3, \delta = 0.8$  dan untuk ukuran langkah  $\alpha_k$  diperoleh dengan menggunakan kondisi Wolfe. Semua parameter digunakan pada algoritma metode NH4.

Hasil numerik yang telah diperoleh pada proses komputasi digabungkan menggunakan hasil profil yang dijelaskan oleh Dolan dan Moré [15], dan untuk fungsi yang diujikan menggunakan fungsi non linear tak berkendala dalam artikel [16]. Hasil profil disajikan dalam diilustrasikan pada gambar 1 dan 2,. Gambar 1 dan 2 masing-masing merupakan hasil profil iterasi dan *runningtime*.

Adapun hasil pada gambar 1 dan 2 diperoleh dengan cara berikut sebagai berikut:

$$r_{p,m} = \frac{a_{p,m}}{\min\{a_{p,m} : m \in M\}},$$

dengan  $r_{p,m}$  merupakan hasil ratio,  $P = \{p1, p2, \dots, p30\}$ ,  $M = \{m1, m2, m3, m4\}$ ,  $a_{p,m}$  adalah hasil iterasi dan *running time*. Apabila metode  $m$  tidak menyelesaikan fungsi  $p$  maka  $r_{p,m} = r_M$ , dimana diasumsikan parameter  $r_M \geq r_{p,m}$  untuk semua  $p, m$ . Secara keseluruhan hasil profil dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$P_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{p \in P : \log_2\{r_{p,m}\} \leq \tau\},$$

dengan  $P_s(\tau)$  adalah peluang untuk metode  $m \in M$  dimana hasil ratio  $r_{p,m}$  kurang dari faktor  $\tau \in R$  dari kemungkinan ratio terbaik dan  $n_p$  adalah banyaknya fungsi. Fungsi  $P_s(\tau)$  merupakan fungsi distribusi kumulatif untuk hasil ratio. Nilai  $P_s(1)$  merupakan peluang dimana metode yang diujikan akan lebih baik apabila mencapai angka 1. Hasil dari komputasi tersebut menggunakan bantuan software matematika. Berikut ini merupakan hasil numerik disajikan dalam tabel 1 dan 2 beserta hasil profil yang disajikan dalam gambar 1 dan 2.

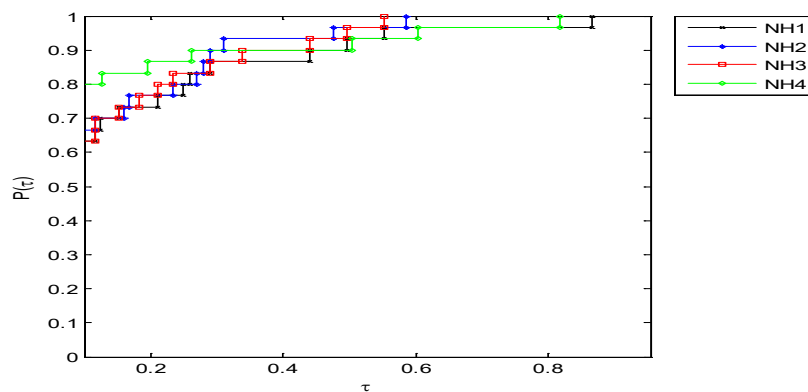
Tabel 1 Hasil iterasi dari beberapa metode konjugat gradien hibrid

| <b>Fungsi</b>           | <b>Dimensi</b> | <b>NH1</b> | <b>NH2</b> | <b>NH3</b> | <b>NH4</b> |
|-------------------------|----------------|------------|------------|------------|------------|
| Rosenbrock              | 10             | 195        | 249        | 179        | 254        |
|                         | 100            | 1006       | 1016       | 1043       | 962        |
|                         | 1000           | 8526       | 8695       | 8548       | 8282       |
| White & Holst           | 10             | 228        | 279        | 259        | 261        |
|                         | 50             | 1021       | 1000       | 968        | 962        |
| Quadratic Penalty (QP1) | 100            | 15         | 16         | 15         | 15         |
|                         | 1000           | 8          | 12         | 8          | 8          |
| SINCOS                  | 50             | 17         | 20         | 17         | 18         |
|                         | 100            | 24         | 19         | 24         | 17         |
|                         | 1000           | 22         | 15         | 22         | 18         |
| Beale                   | 2              | 25         | 31         | 25         | 38         |
|                         | 5              | 239        | 159        | 131        | 231        |
| Tridiagonal 1           | 50             | 10         | 9          | 10         | 9          |
|                         | 100            | 9          | 9          | 9          | 9          |
|                         | 1000           | 7          | 7          | 7          | 7          |
| Hager                   | 50             | 13         | 12         | 13         | 12         |
|                         | 100            | 16         | 15         | 16         | 15         |
| Freudenstein & Roth     | 50             | 19         | 14         | 19         | 14         |
|                         | 100            | 14         | 14         | 14         | 14         |
| Powell                  | 4              | 22         | 18         | 22         | 18         |
|                         | 100            | 22         | 22         | 22         | 24         |
| Wood                    | 4              | 22         | 19         | 22         | 20         |
| Tridiagonal 2           | 50             | 7          | 7          | 7          | 7          |
|                         | 100            | 6          | 6          | 6          | 6          |
|                         | 1000           | 4          | 4          | 4          | 4          |
| Himmelblau              | 50             | 14         | 15         | 14         | 15         |
|                         | 100            | 14         | 14         | 14         | 14         |
|                         | 1000           | 12         | 13         | 12         | 12         |
| Maratos                 | 50             | 190        | 193        | 188        | 160        |
|                         | 1000           | 194        | 182        | 205        | 162        |

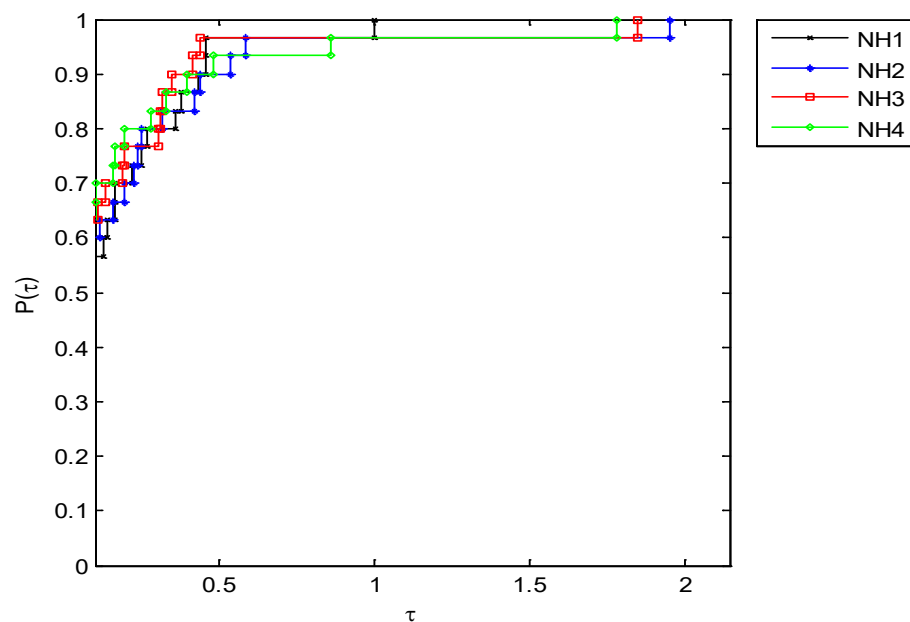
Tabel 2 Hasil *running time* dari beberapa metode konjugat gradien hibrid

| <b>Fungsi</b> | <b>Dimensi</b> | <b>NH1</b> | <b>NH2</b> | <b>NH3</b> | <b>NH4</b> |
|---------------|----------------|------------|------------|------------|------------|
| Rosenbrock    | 10             | 0.5059     | 0.4928     | 0.3677     | 0.4846     |
|               | 100            | 2.2064     | 2.3523     | 2.3039     | 2.2378     |
|               | 1000           | 61.8401    | 49.9178    | 48.3147    | 48.1698    |

| Fungsi                | Dimensi | NH1     | NH2     | NH3     | NH4     |
|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| White & Host          | 10      | 0.4784  | 0.5697  | 0.5479  | 0.6003  |
|                       | 50      | 2.6718  | 2.3866  | 2.4005  | 2.4171  |
| Quadratic Penalty QP1 | 100     | 0.2020  | 0.2313  | 0.2173  | 0.1980  |
|                       | 1000    | 1.2456  | 1.7764  | 1.2274  | 1.2235  |
| SINCOS                | 50      | 0.1627  | 0.1843  | 0.1477  | 0.1691  |
|                       | 100     | 0.3731  | 0.3576  | 0.3968  | 0.3202  |
|                       | 1000    | 6.4374  | 4.7629  | 6.4625  | 5.7778  |
| Beale                 | 2       | 0.1256  | 0.1881  | 0.1599  | 0.1751  |
|                       | 5       | 0.7751  | 0.5236  | 0.3867  | 0.7020  |
| Tridiagonal 1         | 50      | 0.1064  | 0.0948  | 0.1173  | 0.1017  |
|                       | 100     | 0.1684  | 0.1680  | 0.1621  | 0.1655  |
|                       | 1000    | 1.8216  | 1.8522  | 1.8415  | 1.8486  |
| Hager                 | 50      | 0.1382  | 0.1266  | 0.1276  | 0.1287  |
|                       | 100     | 0.2583  | 0.2479  | 0.2656  | 0.2501  |
| Freudenstein & Roth   | 50      | 0.2915  | 0.2244  | 0.2994  | 0.2363  |
|                       | 100     | 0.5288  | 0.5172  | 0.4994  | 0.5070  |
| Powell                | 4       | 0.0836  | 0.3233  | 0.3012  | 0.2878  |
|                       | 100     | 0.7215  | 0.7505  | 0.7590  | 0.8080  |
| Wood                  | 4       | 0.1110  | 0.0812  | 0.0860  | 0.0808  |
| Tridiagonal 2         | 50      | 0.0692  | 0.0713  | 0.0669  | 0.0747  |
|                       | 100     | 0.0967  | 0.1025  | 0.1011  | 0.0998  |
|                       | 1000    | 0.7242  | 0.7448  | 0.7199  | 0.7288  |
| Himmelblau            | 50      | 0.1290  | 0.1254  | 0.1352  | 0.1345  |
|                       | 100     | 0.1969  | 0.2048  | 0.2099  | 0.2043  |
|                       | 1000    | 2.1447  | 2.3184  | 2.1463  | 2.1457  |
| Maratos               | 50      | 1.3843  | 1.3585  | 1.3100  | 1.1502  |
|                       | 1000    | 30.0175 | 28.9140 | 31.4673 | 25.2619 |



Gambar 1 Hasil profil iterasi metode NH1, NH2, NH3 dan NH4



Gambar 2 Hasil profil *running time* metode NH1, NH2, NH3 dan NH4.

Hasil numerik pada gambar 1 dan 2 metode NH4 menunjukkan hasil yang efisien dalam menyelesaikan semua fungsi. Metode NH4 termasuk metode yang dapat bersaing dengan metode yang lain, dikarenakan metode NH4 diusulkan berasal dari ide metode sebelumnya. Dan juga menggunakan pencarian arah yang sama yaitu *inexact line search*.

#### 4. KESIMPULAN

Peneliti mengusulkan satu metode hibrid baru yaitu metode NH4, dimana metode tersebut dapat dibuktikan memenuhi sifat-sifat kekonvergenan global dengan menggunakan kondisi Wolfe dan termasuk metode *descent*. Pada hasil numerik menunjukkan bahwa metode NH4 bisa bersaing dengan beberapa metode terdahulu yang hasilnya disajikan pada gambar 1 dan 2. Metode NH4 juga menunjukkan bahwa efisien dalam menyelesaikan semua fungsi nonlinear yang diujikan.

#### 5. 5. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Nocedal J, Wright SJ. 1999. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag.
- [2] Hestenes MR, Stiefel EL. Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear System. *Journal of Research of the National Bureau of Standart*. 1952; 49(6): 409-432.
- [3] Fletcher R. Reeves C. 1964. Function Minimazation by Conjugate Gradient. *The Computer Journal*, 7:149 – 154.
- [4] Polak B, Ribière G. 1969. Note Surla Convergence des Méthodes de Directions Conjuguées. *Francaise Informat Recherche Opertionelle*, 16:35-43.
- [5] Polyak BT. 1969. The Conjugate Gradient Method in Extreme Problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 9(4): 94-112.
- [6] Fletcher R, 1987. *Practical Methods of Optimization, Unconstrained Optimization*. New York: Wiley.
- [7] Liu YL, Storey CS. 1991. Efficient Generalized Conjugate Gradient Algorithms, Part 1: Theory. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 69(1):129-137.



- [8] Dai YH, Yuan Y. 1999. A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property. *SIAM Journal on Optimization*, 10: 177-182.
- [9] Zhang L, Zhou W. 2007. Two Descent Hybrid Conjugate Method for Optimazation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 216:251-264.doi: 10.1016/j.cam.2007. 04.028.
- [10]Zhang L, Zhou W, Li D. 2006. Global convergence of a modified Fletcher-Reeves conjugate method with Armijo-type line search, *Numerische Mathematik*, 104: 561–572.doi: 10.1007/s00211-006-0028-z.
- [11]Touati-Ahmed D, Storey C. 1990. Efficient Hybrid Conjugate Gradient Techniques: *Journal of Optimization Theory and Applications*, 64(2): 379–397.
- [12]Zhang L. 2006. Nonlinear Conjugate Gradient Methods for Optimization Problems. Ph. D *Thesis*. Hunan University.
- [13]Dai YH, Yuan Y. 2001. An Efficient Hybrid Conjugate Gradient Method for Unconstrained Optimization. *Annal of Operation Research*, 103:33 – 47.
- [14]Zhou A, Zhu Z, Fan H, Qing Q. 2011. Three New Hybrid Conjugate Gradient Method for Optimazation. *Applied Mathematics*, 2:303-308.doi: 10.4236/am.2011.23035.
- [15]Dolan JED, Morè JJ. 2002. Benchmarking Optimization Software with Performance Profil. *Mathematical Programming*. 912(2): 201-213.doi: 10.1007/s101070100263.
- [16]Andrei N. 2008. An Unconstrained Optimization Test Function Collection. *Advanced Modelling and Optimization*, 10(1): 147-161