**ANALISIS PRINSIP KETIGA LITTLEWOOD DALAM TEORI FUNGSI VARIABEL REAL**

Wahidah Alwi

*Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, wahidah.alwi@uin-alauddin.ac.id*

Ishak

*Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar,* *ishakr97@gmail.com*

**ABSTRAK**, Penelitian ini membahas tentang prinsip ketiga dari tiga prinsip littlewood dalam teori fungsi variabel real yaitu hampir setiap barisan fungsi terukur yang konvergen adalah konvergen seragam. Penelitian ini bertujuan menganalisis prinsip tersebut dengan mengkaji kekonvergenan barisan fungsi terukur. pembahasan dalam tulisan ini berisi kekonntinuan dalam fungsi terukur dan kekonvergenan barisan fungsi terukur serta kaitannya dengan kekonvergenan seragam. Lebih jauh dalam tulisan ini akan ditunjukkan suatu sifat yang menyatakan terdapatnya kekonvergenan seragam dalam barisan fungsi terukur konvergen.

**Kata Kunci**: barisan konvergen, fungsi kontinu, fungsi terukur

# PENDAHULUAN

Tiga prinsip Littlewood banyak dijelaskan dalam literatur yang membahas tentang teori fungsi variabel real. prinsip ketiga littlewood menyatakan bahwa hampir setiap barisan fungsi terukur yang konvergen adalah konvergen seragam. Selanjutnya untuk fungsi terukur memiliki beberapa sifat, salah satunya adalah kekontinuan fungsi.

Fungsi dikatakan terukur apabila terdefinisi dengan daerah asal terukur. Fungsi terukur dapat dilihat pada berbagai fungsi yang tidak asing seperti fungsi tangga dan fungsi kontinu dengan daeah asal terukur

Kekontinuan suatu fungsi secara umum diilustrasikan dengan fungsi yang grafiknya tidak terputus disuatu titik dalam interval yang diberikan. Misalkan terdefinisi pada , dikatakan kontinu pada jika kontinu disetiap titik pada interval . Sebagai hal yang cukup mendasar dalam bidang matematika, penelitian mengenai fungsi tidak hanya terbatas dalam dalam ruang yang sempit akan tetapi dikaji hingga konvergensi barisannya ketika menuju tak hingga.

Salah satu kekonvergenan dalam barisan fungsi adalah kekonvergenan seragam. Kekonvergenan ini memiliki kemampuan untuk mempertahankan kekontinuan fungsi. Kekonvergenan seragam menunjukkan bahwa barisan fungsi kontinu yang konvergen akan konvergen kesuatu fungsi yang kontinu.

Berkaitan dengan hal-hal tersebut diatas, tulisan ini bertujuan membahas mengenai kekonvergenan seragam dari barisan fungsi terukur guna menganalisis prinsip ketiga Littlewood dalam teori fungsi variable riil.

# TINJAUANPUSTAKA

**Fungsi terukur**

Secara umum suatu fungsi dikatakan terukur dengan melihat daerah asal fungsi tersebut yang terukur. Namun ketika diperhatikan lebih jauh terdapat kondisi yang harus dipenuhi agar suatu fungsi dikatakan terukur.

***Definisi 1:***

Misalkan adalah ruang terukur dan misalkan . Fungsi bernilai riil diperluas yang terdefinisi pada dikatakan terukur pada jika memenuhi kondisi yang berarti untuk setiap .

Selanjutnya, jika , dan terukur pada maka dikatakan terukur Lebesgue.

***Proposisi 2:***

Andaikan fungsi real dengan daerah asal himpunan terukur, maka keempat pernyataan berikut ekuivalen.

1. himpunan terukur
2. himpunan terukur
3. himpunan terukur
4. himpunan terukur

Akibat keempat pernyataan diatas yaitu

1. himpunan terukur

Operasi dalam fungsi terukur hampir sama dengan operasi fungsi pada umumnya. Misalkan , kemudian dan terdefinisi pada domain terukur, maka merupakan fungsi terukur.

**Kekontinuan Dalam Fungsi Terukur**

Suatu fungsi yang terukur dalam penjelasan sebelumnya dapat diketahui dengan melihat daerah asalnya. Jika daerah asal fungsi tersebut terukur maka fungsi tersebut terukur. Pernyataan ini juga berlaku pada fungsi terukur kontinu sebagai berikut.

***Teorema 3:***

Fungsi kontinu yang didefinisikan pada himpunan terukur adalah fungsi terukur.

***Bukti:***

Misalkan dimana merupakan himpunan terukur dan kontinu. Karena terukur, maka terukur.

Ambil sebarang sehingga

Interval merupakan himpunan buka di , dan juga diketahui bahwa merupakan himpunan buka di . Karena

dan setiap interval merupakan himpunan terukur maka terukur.

Selanjutnya, kekontinuan dalam himpunan tertutup di juga memiliki sifat yang hampir sama dengan kekontinuan dalam fungsi terukur secara umum. Hal ini dapat dilihat pada proposisi berikut.

***Proposisi 4:***

Misalkan adalah himpunan tertutup di . Jika adalah fungsi kontinu bernilai riil pada , maka memiliki perluasan kontinu ke , ini berarti terdapat fungsi kontinu berniai riil pada sedemikian sehingga pada

***Bukti:***

Misalkan . Kemudian adalah himpunan buka di sehingga dimana adalah koleksi terhitung dari interval buka saling asing di . Misalkan untuk . Misalkan didefinisikan fungsi bernilai riil pada dengan pada dan

Ini berarti linear pada interval tutup . Perlu dicatat bahwa dan di , sehingga dan terdefinisi dan dan . Misal ditunjukkan bahwa kntinu disetiap . Sekarang dan dan setiap adalah salah satu di atau di .

Selanjutnya, pembahasan mengenai kekontinuan dalam ruang terukur juga dapat dilihat pada teorema berikut.

***Teorema 5 (Lusin):***

Misalkan suatu fungsi terukur bernilai riil diperluas pada yang bernilai riil dimana-mana pada . Maka untuk setiap terdapat himpuna buka di dengan dan fungsi bernilai riil kontinu pada sedemikian sehingga pada .

***Bukti:***

Ambil , untuk setiap terdapat subset dari terukur dengan dan fungsi bernilai riil pada sedemikian sehingga pada . Misalkan maka dipunyai

 pada untuk setiap .

Ini menunjukkan bahwa barisan dari fungsi kontinu konvergen seragam ke pada . Kekontinuan dari dan kekonvergenan seragam ke pada mengimplikasikan bahwa kontinu pada . Sekarang

Berdasarkan ukuran luar, terdapat himpunan buka di sedemikian sehingga dan . Telah diketahui bahwa kontinu pada , berarti kontinu pada himpunan tertutup maka terdapat fungsi kontinu bernilai riil pada sedemikian sehingga pada .

**Barisan fungsi terukur dan kekonvergenan dalam ukuran**

Barisan fungsi terukur merupakan suatu barisan dimana elemen-elemennya merupakan fungsi terukur. Sifat-sifat barisan fungsi terukur meliputi limit dan supremum dari barisan merupakan fungsi terukur. Lebih jelasnya ditunjukkan oleh teorema berikut.

***Teorema 8:***

Misalkan barisan fungsi terukur, maka , , , , , dan adalah fungsi-fungsi terukur.

***Bukti:***

Misalkan terdefinisi dengan , maka

Oleh karena itu ukuran dari mengimpikasikan pada . Serupa dengan sebelumnya, jika terdefinisi dengan , maka

Sehingga terukur. Argument serupa juga berlaku pada pernyataan mengenai infimum. Menurut pernyataan diketahui bahwa terukur. Pembuktian untuk serupa.

Kekonvergenan dalam ruang terukur dapat dinyatakan bahwa limitnya ketika mentdekati tak hingga dalam ukuran bernilai 0, yang didefinisikan sebagai berikut.

***Definisi 9:***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil diperluas monoton pada himpunan . dikatakan konvergen dalam ukuran pada jika terdapat fungsi terukur- bernilai riil diperluas pada sedemikian hingga untuk setiap berlaku

Ini berarti untuk setiap dan terdapat sedemikian hingga

Kekonvergenan ini dapat ditulis pada .

***Proposisi 10:***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil diperluas monoton pada himpunan dan misalkan adalah fungsi terukur- bernilai riil pada . Maka pada jika dan hanya jika untuk setiap terdapat sedemikian hingga

 (3)

***Bukti:***

Misalkan ditunjukkan bahwa (3) ekuivalen pada pernyataan (2) pada definisi 9 dan (2) berimplikasi pada (3). Kemudian (3) berimplikasi pada (2) ditunjukkan dengan memisalkan dan ……… dan misalkan . Dengan pernyataan (3) terdapat sedemikian sehingga . Sekarang untuk berimplikasi dan dipunyai

Ini menunjukkan bahwa (3) berimplikasi pada (2).

***Akibat 11:***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil diperluas monoton pada himpunan dan misalkan adalah fungsi terukur- bernilai riil pada . Terdapat dua barisan bilangan positif dan sedemikian hingga

1. dan
2. untuk setiap

Maka konvergen ke di dalam ukuran .

***Bukti:***

Diberikan sebarang misalkan bernilai besar sehingga untuk setiap dipunyai dan . Maka sehingga untuk . Ini menunjukkan bahwa konvergen ke pada dalam ukuran sesuai dengan proposisi 10

***Lemma12:***

Diberikan ruang terukur . Misalkan dan adalah dua fungsi terukur- bernilai riil pada himpunan . Misalkan , , dan adalah bilangan positif sedemikian hingga . Maka untuk suatu fungsi terukur- bernilai riil diperluas pada , berlaku

, (1)

Dan

. (2)

***Bukti:***

Misalkan tiga himpunan di (1) dapat ditulis dengan dan . Jika dan maka dan sehingga dan maka

Sehingga . Jika maka . Ini menunjukkan bahwa sehingga . Ini membuktikan pernyataan (1). Maka pernyataan (2) dibuktikan dengan mengikuti pernyataan (1) dengan kemonotonan dan subaditifitas dari .

***Teorema 13 (H. Lebesgue):***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil diperluas pada himpunan dan misalkan adalah fungsi terukur- bernilai riil pada . Berlaku

1. konvergen ke diman-mana pada himpunan ,

Maka konvergen ke dalam ukuran pada himpunan .

***Bukti:***

Dalam ruang terukur , diketahui bahwa fungsi terukur- bernilai riil diperluas pada himpunan konvergen ke dimana-mana pada dan yang berimplikasi bahwa untuk setiap dipunyai . Sehingga ini menunjukkan kekonvergenan ke pada dalam ukuran.

**Barisan Cauchy dalam Kekonvergenan terukur**

secara umum barisan Cauchy merupakan merupakan barisan yang kekonvergenannya ditinjau dari selisih antar suku barisan. Dibagian ini akan dijelaskan barisan Cauchy dan kekonvergenannya dalam ruang ukuran.

***Definisi 14:***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil pada himpunan . Dapat dikatakan barisan adalah barisan Cauchy yang konvergen dalam ukuran pada jika untuk setiap dan terdapat seddemikian hingga

 untuk

Atau ekuivalen dengan untuk setia terdapat sedemikian hingga

 untuk .

***Observasi 15:***

Jika adalah barisan fungsi terukur- bernilai riil dan jika pada , maka adalah barisan Cauchy yang konvergen dalam ukuran pada .

***Bukti:***

Jika pada , maka untuk setiap terdapat sedemikian sehingga untuk .

Ini menunjukkan bahwa adalah barisan Cauchy yang konvergen dalam ukuran pada .

**Tiga prinsip littlewood**

Dalam teori fugsi varibel real, J.E. Littlewood menyatakan tiga prinsip yang lazim digunakan, yaitu:

1. Hampir setiap himpunan terukur merupakan gabungan berhingga selang-selang
2. Hampir setiap fungsi terukur merupakan fungsi kontinu
3. Hampir setiap barisan fungsi (terukur) yang konvergen adalah konvergen seragam.

# METODOLOGI

Penelitian ini merupakan kajian teori mengenai kekonvergenan barisan fungsi terukur, dimana akan dibuktikan bahwa fungsi terukur yang konvergen adalah konvergen seragam sesuai dengan prinsip ketiga Littlewood. Prosedur dari penenlitian ini yaitu: pertama, menganalisis sifat fungsi terukur khususnya dalam kekontinuan fungsi. Selanjutnya, menganalisis kekonvergenan barisan fungsi terukur berdasarkan sifat kontinu yang dimilikinya. Kemudian yang terakhir adalah membuktikan bahwa hampir setiap barisan fungsi terukur yang konvergen adalah konvergen seragam.

# PEMBAHASAN

Kekontinuan dalam fungsi terukur dapat ditunjukkan pada terema berikut.

***Teorema 17 (Borel):***

Misalkan adalah fungsi terukur bernilai riil diperluas pada yang bernilai rill dimana-mana pada . Kemudian untuk setiap terdapat subset terukur dari dengan dan fungsi bernilai riil kontinu pada sedemikian hingga pada . Sehingga jika pada untuk sedemikian hingga , maka dapat dipilih bahwa pada

***Bukti:***

Diberikan terdapat subset terukur dari dengan dan fungsi tangga kontinu kanan pada sedemikian sehingga on . Diberikan dengan dimana untuk dan adalah koleksi saling asing dari interval terhingga dari kelas dengan . Biangan interval lebih jauh bahwa dibagian kiri dari pada garis bilangan untuk setiap . Ini dapat terjadi dengan melihat bahwa titik akhir dari interval didaerah asal fungsi tangga kontinu kanan di tidak memiliki titik limit di . Misalkan dimana untuk . Himpunan memuat semuat titik diskontinu dari fungsi tangga di . Sekarang untuk setiap , adalah titik akhir kanan dari interval dan titik akhir kiri dari interval . Didefinisikan

Maka dimana adalah disebelah kiri , disebelah kiri , disebelah kiri dan seterusnya. Didefinisikan fungsi kntinu bernilai riil pada dengan pada dan memisalkan linear pada dengan asumsi nilai dari pada dua titik akhir untuk setiap . sehingga untuk didefinisikan dan untuk didefinisikan dengan

Ini berarti,

Misalkan . Maka meruakan subset terukur dari dengan

Dan pada . Maka pada . Jika pada , maka dapat dipilih sehingga pada maka untuk definisi fungsi kontinu bernilai riil diatas, diperoleh pada .

Menurut teorema tersebut, dapat diketahui bahwa merupakan fungsi kontinu jika terdapat sedemikian sehingga .

Seanjutnya, kekonvergenan dalam ruang terukur memiliki keunikan tersendiri. Khususnya fungsi dimana suatu barisan akan konvergen yang termuat dalam teorema berikut.

***Teorema 18 (keunikan limit konvergen dalam ukuran):***

Diberikan ruang terukur . Misalkan adalah fungsi terukur- bernilai riil diperluas pada himpunan dan misalkan dan adalah dua fungsi terukur- bernilai riil pada himpunan . Jika pada dan pada , maka on .

***Bukti:***

Andaikan pada dan pada juga. Maka untuk setiap dipunyai

 (1)

Untuk menunjukkan bahwa dimana-mana pada , diasumsikan suatu kontradiksi bahwa . Maka sejak jika dan hanya jika , diperoleh

 (2)

Sekarang , diperoleh

 (3)

Dengan (2), ruas kiri dari (3) adalah positif. Maka tidak semua penjumlahan diruas kanan sama dengan 0. Kemudian terdapat suatu sedemikian sehingga

 (4)

Sehingga untuk setiap diperoleh

Dengan memisalkan pada ruas kanan pertidaksamaan terakhir, diperoleh

Sehingga kontradiksi dengan ketaksamaan (4) yang berarti kontradiksi dengan pengandaian.

Kekonvergenan barisan dalam ruang terukur juga berkaitan dengan kekonvergenan seragam. Suatu barisan fungsi bernilai riil diperluas konvergen seragam pada himpunan jika untuk setiap yang diberikan, terdapat yang bergantung pada tetapi tidak pada sedemikian sehingga untuk setiap dimana , atau ekuivalen dengan untuk setiap terdapat sedemikian sehingga untuk setiap dimana . Salah satu kelebihan dari kekonvergenan seragam yaitu kemampuannya mempertahankan kekontinuan suatu fungsi. Hal ini berarti jika suatu barisan fungsi konvergen seragam ke fungsi , maka kontinu.

Setelah pembahasan mengenai kekontinuan dalam fungsi terukur dan kekonvergenan dalam ruang terukur serta memperhatikan sifat dari kekonvergenan seragam, ditunjukkan satu teorema kekonvergenan seragam yang berlaku dalam ruang terukur.

***Teorema 19:***

Misalkan untuk setiap terdapat subset terukur dari dengan . Suatu barisan fungsi yang konvergen ke di dikatakan konvergen seragam jika terdapat fungsi kontinu sedemikian sehingga yang setara dengan dimana-mana.

***Bukti:***

Jika konvergen ke untuk maka berlaku . Misalkan terdapat fungsi kontinu sedemikian sehingga . Menurut Teorema 17 merupakan fungsi terukur kontinu pada . Karena untuk setiap berlaku maka . Sehingga menurut Teorema 18 konvergen ke dan konvergen ke . Ini menyatakan bahwa konvergen seragam ke dimana kontinu sesuai dengan sifat kekonvergenan seragam yang mempertahankan kekntinuan fungsi.

Teorema 19 membuktikan secara parsial prinsip ketiga littlewood bahwa hampir setiap barisan fungsi terukur konvergen adalah konvergen seragam. Dimana pada pernyataan tersebut ditunjukkan bahwa konvergen ke fungsi kontinu yang bersesuaian dengan kemampuan kekonvergenan seragam dalam mempertahankan kekontinuan fungsi.

# KESIMPULAN

Kesimpulan dari tulisan ini adalah suatu barisan fungsi terukur dikatakan konvergen seragam ketika barisannya konvergen ke suatu fungsi dimana fungsi tersebut kontinu. Hal ini diketahui dari sifat kekonvergenan seragam yang mempertahankan kekontinuan fungsi.

# DAFTAR PUSTAKA

[1] Goldberg, Richard R. (1976). “*Method of Real Analysis”*.New York : John Wiley and Sons.

[2] Royden, H.L.(1989).*”Real Analysis 3rd”*. New York. Macmillan Publishing Company.

 [3] Ubaidillah, Firdaus, Soeparna Darmawijaya dan Ch. Rini Indrati. (2013). *“Kekonvergenan Barisan didalam Ruang Fungsi Kontinu C[a,b]”*.Jurnal CAUCHY, Vol. 2 No. 4, halaman 184-188.

[4] Yeh, J..(2006). *Real Analysis: Theory of Measure and Inegration 2nd.* Singapore. World Scientific Publishing.