**EKUIVALENSI KEKONVERGENAN POINTWISE DAN KEKONVERGENAN SERAGAM PADA BARISAN FUNGSI**

Wahidah Alwi[[1]](#endnote-2)

Muh. Irwanii

Ishak R[[2]](#endnote-3)i

**ABSTRAK**, Tulisan ini membahas tentang ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam pada barisan fungsi. Kekonvergenan pointwise adalah kekonvergenan barisan fungsi dimana suatu barisan fungsi dapat memiliki satu atau lebih nilai limit dan tidak mampu mempertahankan sifat kontinu suatu fungsi. Sedangkan kekonvergenan seragam mengakibatkan ketunggalan nilai limit dan mampu mempertahankan kekontinuan fungsi. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan karakteristik dari barisan fungsi yang menjamin ekuivalensi dari dua jenis kekonvergenan tersebut. Terkait dengan ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam, dapat ditunjukkan karakteristik barisan fungsi yang menjadi syarat terjadinya ekuivalensi yaitu barisan yang monoton dan terbatas serta ketunggalan nilai limitnya. Selain itu ditunjukkan karakteristik fungsi yang menjamin terjadinya ekuivalensi yaitu barisan fungsi monoton seragam.

**Kata Kunci**: barisan fungsi, konvergen pointwise, konvergen seragam

# PENDAHULUAN

Salah satu cabang dari matematika analisis adalah barisan. Barisan dapat diartikan sebagai fungsi dari himpunan bilangan asli kehimpunan bilangan real . Barisan telah mengalami perkembangan yang cukup besar, khususnya dalam mencari sifat-sifat yang dimiliki serta kekonvergenannya. Hingga saat ini sifat-sifat barisan tetap menarik untuk dikaji.

Barisan fungsi merupakan salah satu bentuk dari barisan yang elemen-elemennya berupa fungsi. Dimana bentuk fungsi yang merupakan suku ke-n bergantung pada bilangan asli. Seperti halnya barisan bilangan riil, barisan fungsi juga memiliki sifat dan kekonvergenannya pun dapat diselidiki. Seperti pada barisan bilangan riil, ketika dihadapkan dengan sebuah barisan fungsi {*fn*} maka terjadi ketertarikan untuk mengetahui perilaku *fn* apabila .

Kekonvergenan dalam barisan fungsi terdapat dua jenis, yaitu kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam. Salah satu kekurangan dari kekonvergenan pointwise adalah ketidak mampuannya mempertahankan kekontinuan fungsi. Lain halnya dengan kekonvergenan seragam, ketika suatu barisan fungsi dinyatakan konvergen seragam ke *f* maka dapat dipastikan bahwa *f* kontinu. Dengan kata lain, kekonvergenan seragam lebih kuat dari pada kekonvergenan pointwise dengan kemampuannya mempertahankan sifat kekontinuan fungsi. Meski demikian, namun ada hal dimana kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam bernilai sama.

pembahasan dalam tulisan ini akan mencari ekuivalensi dari kedua kekonvergean tersebut. Pembahasan mengenai ekuivaensi akan dibatasi pada interval .

# TINJAUANPUSTAKA

**Sistem bilangan real**

Himpunan dalam bilangan real biasa disajikan dalam bentuk interval atau yang lain. Bentuk tersebut menyatakan batasan dari himpunan.

**Definisi 1**

Diberikan subset tak kosong

1. Himpunan dikatakan terbatas keatas () jika terdapat suatu bilangan sedemikian hingga untuk semua . Setiap bilangan seperti ini disebut dengan batas atas () dari .
2. Himpunan dikatakan terbatas kebawah () jika terdapat suatu bilangan sedemikian hingga untuk semua . Setiap bilangan seperti ini disebut dengan batas bawah () dari .
3. Suatu himpunan dikatakan terbatas () jika terbatas keatas dan terbatas kebawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas().

Suatu himpunan yang terbatas dapat dengan diketahui dengan mudah batasnya. Akan tetapi lain halnya dengan batas optimum terkadang tidak dimiliki oleh suatu himpunan. Dalam bagian ini akan dijelaskan mengenai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu himpunan.

**Definisi 2**

Diberikan subset tak kosong R

1. Jika terbatas keatas, maka suatu bilangan disebut supremum (batas atas terkecil) dari jika memenuhi kondisi berikut:
2. merupakan batas atas , dan
3. Jika adalah sebarang batas atas , .

Ditulis

1. Jika terbatas kebawah, maka suatu bilangan disebut infimum (batas bawah terbesar) dari jika memenuhi kondisi berikut:
2. merupakan batas bawah , dan
3. Jika adalah sebarang batas atas , .

Ditulis .

Suatu himpunan tak kosong subset dari memiliki supremum yang tunggal, sebab sup merupakan batas atas terkecil dari . Hal tersebut berlaku pula untuk infimum suatu himpunan.

**Barisan bilangan real**

Barisan bilangan real merupakan pemetaan dari bilangan asli kebilangan real yang diperjelas dengan definisi berikut

**Definisi 3**

Barisan bilangan real (atau barisan di R) adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan dengan range dalam

Selanjutnya, suatu barisan dikatakan konvergen kesuatu titik jika barisan tersebut memiliki limit.

**Definisi 4**

Barisan dikatakan konvergen ke , atau dikatakan limit barisan jika untuk setiap terdapat bilangan asli sedemikian hingga untuk setiap , untuk berlaku .

Beberapa sifat barisan konvergen dapat dilihat dalam teorema berikut yang menyangkut ketunggalan nilai limit dan keterbatasan barisan.

**Teorema 5**

Jika barisan ( ) konvergen, maka ( ) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal).

**Bukti:**

Misalkan dan dengan . Jika diambil terdapat sedemikian sehingga untuk setiap dan terdapat sedemikian sehingga untuk semua . Dipilih max}. Menurut Ketaksamaan Segitiga untuk diperoleh

Karena berlaku untuk setiap , maka yang berarti . Kontradiksi dengan pengandaian, sehingga terbukti bahwa limit tunggal.

**Teorema 6**

Jika konvergen, maka terbatas.

**Bukti:**

Diketahui dan ambil , maka terdapat bilangan asli sedemikian hingga berlaku untuk semua . Dengan ketaksamaan segitiga untuk maka diperoleh

Jika dipilih

Maka terbukti bahwa untuk semua .

Suatu barisan dikatakan monotn naik apabila untuk semua dan barisan dikatakan monoton tuerun apabila untuk semua .

**Teorema 7**

1. Jika naik (monoton) dan terbatas ke atas, maka konvergen dengan

.

1. Jika turun (monoton) dan terbatas ke bawah, maka konvergen dengan

 .

**Bukti:**

Karena terbatas ke atas, maka terdapat sedemikian hingga untuk semua . Namakan, maka , terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap, maka memiliki supremum, misalkan . Diambil , maka terdapat sedemikian hingga . Karena monoton naik, maka untuk berlaku

Atau

Ini membuktikan bahwa konvergen ke.

pembuktian untuk infimum serupa.

**Barisan fungsi**

Barisan fungsi merupakan barisan yang elemennya adalah berupa fungsi. Sehingga fungsi untuk setiap suku bergantung pada bilangan asli. Baisan fungsi konvergen terbagi atas konvergen pointwise dan konvergen seragam. Kekonvergenan pointwise didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 8**

Barisan fungsi dikatakan konvergen pointwise ke suatu fungsi jika , untuk setiap dimana .

Definisi tersebut cukup jelas menggambarkan bahwa nilai interval yang diberikan sangat mempengaruhi nilai limitnya sebagaimana dalam lemma berikut.

**Lemma 9**

Suatu barisan fungsi pada himpunan konvergen ke suatu fungsi jika dan hanya jika untuk setiap dan setiap ada bilangan asli sedemikian sehingga untuk semua berlaku .

**Bukti:**

Pertidaksamaan di atas menunjukkan bahwa berpengaruh terhadap untuk memenuhi pertidaksamaan. Sehingga jelas bahwa dalam memenuhi pertidak samaan, bergantung terhadap nilai dan .

Selanjutnya, suatu barisan yang knvergen seragam hanya bergantung pada nilai dan berlaku untuk semua nilai dalam interval. Keknvergenan seragam didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 10**

Barisan fungsi bernilai riil di . Barisan fungsi dikatakan konvergen seragam ke fungsi di , jika diberikan , , , . Fungsi merupakan nilai limit dari untuk nilai .

**Akibat 11**

Barisan fungsi tidak konvergen seragam ke di jika dan hanya jika yang memenuhi ,

**Bukti:**

Sesuai dengan definisi bariasan konvergen seragam bahwa Barisan fungsi dikatakan konvergen seragam ke fungsi di , jika diberikan , , , . Fungsi merupakan nilai limit dari untuk nilai , diketahui bahwa jika diambil maka memenuhi pertidaksamaan . Jadi, jika diambil sehingga tidak ada yang memenuhi pertidaksamaan maka dinyatakan tidak konvergen seragam.

Seperti halnya dalam barisan bilangan real, dalam barisan fungsi juga dikenal kriteria Cauchy dengan memperhatikan nilai mutlak dari selisih suku yang berdekatan sebagaimana disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema 12 (Kriteria Cauchy)**

Barsian fungsi konvergen seragam ke di jika dan hanya jika diberikan maka ada bilangan asli sedemikan sehingga , untuk semua ;

**Bukti:**

Misalkan konvergen seragam ke di. Diberikan , barisan fungsi konvergen seragam ke sedemikian sehingga . merupakan bilangan asli juga dimana , berlaku . Maka diperoleh

 .

Kemampuan dari kekonvergenan seragam dalam mempertahankan kekontinuan fungsi terdapat dalam teorema berikut.

**Teorema 13**

Misalkan konvergen seragam ke pada suatu interval . Jika kontinu di untuk tiap , maka juga kontinu di .

**Bukti:**

Ambil , kemudian pilih sedemikian sehingga untuk setiap dan berlaku . Karena kontinu di , maka suatu interval yang memuat sedemikian sehingga untuk setiap berlaku . Jadi, untuk setiap , kita mempunyai . Ini membuktikan bahwa kontinu di .

# METODOLOGI

ini merupakan kajian teori mengenai kekonvergenan barisan fungsi yaitu ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam. Prosedur pada penelitian ini adalah menunjukkan hubungan dari kedua keknvergenan berdasarkan definisinya. Kemudian menganalisis sifat-sifat yang berlaku pada kedua kekonvergenan tersebut. Selanjutnya, menentukan sifat-sifat yang berlaku pada kekonvergenan pointwise sekaligus pada kekonvergenan seragam. Terakhir, akan ditunjukkan ekuivalensi kekonvergenan berdasarkan karakteristik barisan fungsi yang didapat dari sifat-sifat kekonvergenan barisan.

# PEMBAHASAN

**Hubungan keknvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam**

Kekonvergenan seragam yang menyatakan limit barisan yang berlaku untuk semua nilai mengakibatkan kekonvergenan pointwise atau dengan kata lain, kekonvergenan pointwise merupakan syarat perlu untuk kekonvergenan seragam. Hal ini dapat dilihat dari definisi konvergen pointwise yang diperjelas dengan lemma 2.45 bahwa, Barisan konvergen pointwise ke suatu fungsi jika dan hanya jika dan berlaku . Pertidaksamaan ini menyatakan bahwa untuk memenuhi pertidaksamaan, tidak hanya dipengaruhi oleh nilai , akan tetapi juga berpengaruh dalam memenuhi pertidaksamaan. Kemudian menurut definisi konvergen seragam, Barisan konvergen seragam kesuatu fungsi di, jika diberikan , , , . Pertidaksamaan ini menunjukkan bahwa dalam memenuhi pertidaksamaan, hanya nilai yang berpengaruh terhadap dan nilai berlaku untuk semua nilai

Penjelasan tersebut menunjukkan bahwa kekonvergenan pointwise memuat kekonvergenan seragam yang berarti suatu barisan konvergen seragam jika dan hanya jika konvergen pointwise dan ketika nilai dari keduanya ada maka nilainya sama.

**Sifat-sifat kekonvergenan pointwise**

Kekonvergenan pointwise memiliki kekurangan dalam hal kekontinuan. Hal tersebut mengindikasikan bahwa nilai limitnya dapat lebih dari satu. Hal ini disebabkan karena kekonvergenan tersebut dipengaruhi oleh nilai sehinnga dapat menimbulkan nilai limit yang berbeda dalam suatu interval.

**Kasus 14:**

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi .

**Penyelesaian:**

Fungsi dan yang berarti berlaku untuk dan untuk . Secara umum diketahui bahwa Barisan fungsi konvergen pointwise di yaitu konvergen pointwise ke 0 untuk dan konvergen pointwise ke 1 untuk

Suatu barisan fungsi dikatakan terbatas apabila barisan tersebut terbatas keatas dan terbatas kebawah atau . Selanjutnya terema keterbatasan barisan dpat berlaku pada kekonvergenan pointwise di .

**Teorema 15:**

barisan fungsi yang konvergen pointwise adalah barisan terbatas.

**Bukti:**

andaikan konvergen ke dan ambil , maka terdapat bilangan asli sedemikian hingga berlaku untuk semua . Jika digunakan ketaksamaan segitiga dengan maka didapat

Jika dipilih

Maka itu menyatakan bahwa untuk semua

**Kasus 16:**

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi untuk dan

 untuk . Dapat dilihat bahwa terbatas dan naik monoton untuk setiap Fungsi dan yang berarti berlaku untuk dan untuk . Secara umum diketahui bahwa Barisan fungsi konvergen pointwise di yaitu konvergen pointwise ke 1 untuk dan konvergen pointwise ke 0 untuk

**Sifat-sifat kekonvergenan seragam**

Kekonvergenan seragam merupakan kekonvergenan barisan fungsi yang mirip dengan kekonvergenan barisan bilangan real. hal itu dapat dilihat dengan berlakunya teorema dalam barisan bilangan real pada kekonvergenan tersebut seperti ketunggalan nilai limit dan keterbatasan barisan konvergen.

**Teorema 17:**

Jika barisan konvergen seragam, maka limit barisan tunggal.

**Bukti:**

Andaikanbarisan konvergen ke dan dengan . Maka untuk sebarang terdapat sedemikian sehingga untuk setiap dan terdapat sedemikian sehingga untuk setiap . Dipilih max}. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk diperoleh

Karena berlaku untuk setiap , maka yang berarti . Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

Ketunggalan nilai limit pada barisan fungsi yang konvergen seragam merupakan indikasi dari kekontinuan nilai yang merupakan limit dari barisan .

**Teorema 18:**

Jika barisan konvergen seragam, maka terbatas.

**Bukti:**

Diketahui konvergen ke dan ambil , maka terdapat bilangan asli sedemikian hingga berlaku untuk semua . Jika digunkan ketaksamaan segitiga dengan maka didapat

Jika dipilih

Maka itu menyatakan bahwa untuk semua

Sebagaimana dalam barisan bilangan real, barisan dikatakan naik monoton jika dan barisan dikatakan turun monoton jika . Sebuah barisan dikatakan monoton apabila monoton naik atau monoton turun. Suatu barisan yang monoton naik atau monoton turun dan juga terbatas belum tentu konvergen seragam. Hal ini disebakan barisan belum tentu memiliki supremum atau infimum.

**Teorema 19:**

Jika barisan monoton dan mempunyai supremum/infimum maka barisan konvergen seragam ke supremum/infimumnya.

**Bukti:**

Misalkan dan . Diambil , maka terdapat sedemikian hingga . Karena naik monoton, maka untuk berlaku

Atau

Jadi, terbukti bahwa konvergen ke.

Selanjutnya, Barisan dikatakan naik seragam (uniformly nondecreasing) jika diberikan terdapat sehingga untuk berlaku . Barisan dikatakan turun seragam (uniformly nonincreasing) jika diberikan terdapat sehingga untuk berlaku

Pembahasan terakhir untuk kekonvergenan seragam yaitu teorema yang menjamin suatu barisan fungsi konvergen seragam ke fungsi yang disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema 20:**

Diberikan barisan terbatas. Jika monoton seragam maka memiliki supremum/infimum. Lebih jauh, barisan konvergen ke supremum/infimumnya.

**Bukti:**

Misalkan terbatas dan monoton seragam (naik). Diambil terdapat sehingga

untuk berlaku

.

Karena terbatas pada interval maka terbatas di . Menurut sifat lengkap, maka terdapat untuk . Berdasarkan Teorema 4.3, maka konvergen ke supremumnya.Bukti untuk turun seragam yang konvergen keinfimumnya serupa.

**Sifat-sifat yang mengakibatkan ekuivalensi pada kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam**

Bagian meupakan pembahasan mengenai sifat-sifat barisan konvergen seragam yang dapat mengakibatkan terjadinya ekuivalensi dengan kekonvergenan poitwise. Pembuktian teorema selanjutnya digunakan pemisalan konvergen yang berarti barisan fungsi konvergen pointwise sekaligus konvergen seragam. Berikut ini dibahas teorema yang menjadi syarat terjadinya ekuivalensi disajikan dalam Teorema 4.4.1 dan Teorema 4.4.2

**Teorema 21:**

Jika barisan konvergen, maka limit barisan tunggal.

**Bukti:**

Andaikanbarisan konvergen ke dan dengan . Maka untuk sebarang terdapat sedemikian sehingga untuk setiap dan terdapat sedemikian sehingga untuk setiap . Dipilih max}. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk diperoleh

Karena berlaku untuk setiap dan juga berlaku untuk semua , maka yang berarti . Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

Ketunggalan nilai limit dapat menjadi indikasi terjadinya ekuivalensi dalam kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam hal tersebut sesuai dengan Teorema 4.3.1 tentang ketunggalan nilai limit dan akan terjadi barisan fungsi konvegen poitwise ketikan barisan fungsi kovergen seragam sebagaimana diketahui bahwa kekonvergenan poitwise merupakan syarat perlu terjadinya kekonvergenan seragam.

**Teorema 22:**

Jika barisan konvergen, maka terbatas

**Bukti:**

Diketahui konvergen ke dan ambil , maka terdapat bilangan asli sedemikian hingga berlaku untuk semua . Jika digunkan ketaksamaan segitiga dengan maka didapat

Jika dipilih

Maka itu menyatakan bahwa untuk semua

**Kasus 23:**

Tunjukkan keterbatasan barisan konvergen .

**Penyelesaian:**

Cukup jelas bahwa konvergen (pointwise dan seragam) ke 0 untuk .

 monoton turun dengan dan terbatas dengan .

Dapat dilihat bahwa suatu barisan yang konvergen pointwise sekaligus konvergen seragam merupakan barisan terbatas, akan tetapi ketebatasan dari barisan tidak memastikan terjadinya ekuivalensi. Jadi, keterbatasan suatu barisan merupakan syarat ekuivalennya kedua kekonvergenan tersebut. Hal ini dapat diketahui dari barisan fungsi yang konvergen pointwise merupakan barisan terbatas yang pada dasarnya barisan fungsi kovergen pointwise belum tentu barisan tersebut konvergen seragam.

Selanjutnya, sifat yang mengindikasikan terjadinya ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam yaitu kepemilikan supremum atau infimum disajikan dalam Teorema 4.4.3 sebagai berikut.

**Teorema 24:**

Jika barisan naik monoton dan mempunyai supremum/infimum maka barisan konvergen ke supremum/infimumnya.

**Bukti:**

Misalkan dan . Diambil , maka terdapat sedemikian hingga . Karena naik monoton, maka untuk berlaku

Atau

Jadi, terbukti bahwa konvergen ke.

Pembuktian untuk infimum serupa.

**Kasus 25:**

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi ; .

**Penyelesaian:**

Fungsi yang berarti berlaku yang berarti berdasarkan dan yang diberikan barisan konvergen pointwise ke 1 pada interval [0,1] dan barisan fungsi konvergen seragam menuju pada karena nilai yang berarti jika diambil sebarang nilai ada nilai sedemikian sehingga berlaku untuk semua . Disini dapat dilhat bahwa supremum dari adalah barisan monoton turun, selanjutnya memiliki infimum yaitu 1 dan konvergen ke . Sehingga jelas bahwa konvergen ke infimumnya.

Selanjutnya, dijelaskan sifat terakhir yang menjamin ekuivalensi konvergen pointwise dan konvergen seragam dalam teorema berikut ini.

**Teorema 26:**

Diberikan barisan {𝑓𝑛} terbatas.Jika {𝑓𝑛} monton seragam maka {𝑓𝑛} memiliki supremum/infimum. Lebih jauh, barisan {𝑓𝑛} konvergen ke supremum/infimumnya.

**Bukti:**

Diberikan barisan terbatas dan naik seragam. Diambil maka terdapat sedemikian hingga untuk berlaku

.

Karena terbatas pada maka terbatas di . Menurut sifat lengkap, terdapat untuk . Berdasarkan Teorema 4.7, maka konvergen ke supremumnya.

Pembuktian untuk turun seragam yang kovergen ke infimumnya serupa.

Ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam dari suatu barisan fungsi dijamin terjadi jika barisan fungsi naik seragam atau turun seragam.

**Ekuivalensi kekonvergenan pointwise dan seragam berdasarkan karakteristik barisan**

Sifat barisan fungsi telah dibahas pada bagian-bagian sebelumnya berdasarkan teorema konvergensi barisan. Pada bagian ini ditunjukkan karakteristik barisan fungsi yang kovergen berdasarkan karakteristik barisan fungsi yang telah dibahas.

**Kasus 27:**

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi yang didefinisikan untuk dan untuk dengan .

**Penyelesaian:**

Barisan dinyatakan konvergen pointwise karena memiliki karakteristik berikut:

1. Barisan monoton dimana naik monoton untuk setiap .
2. terbatas sebab untuk setiap .
3. Limit barisannya ada yaitu, dan .

Berdasarkan karakteristik dari barisan monoton dan terbatas maka konvergen pointwise di . Jika konvergen pointwise ke 1 untuk dan konvergen pointwise ke 0 untuk maka limitnya ada.

Barisan dinyatakan tidak konvergen seragam karena tidak memiliki keseluruhan karakteristik barisan fungsi seragam. Berikut ini karakteristik barisan fungsi konvergen seragam, yaitu:

1. Barisan monoton dimana naik monoton untuk setiap .
2. terbatas sebab untuk setiap .
3. memiliki supremum.
4. naik seragam jika terdapat bilangan asli sehingga untuk setiap berlaku.

Sehingga berdasarkan karakteristik kekonvergenan seragam, tidak konvergen seragam di karena tidak memenuhi (c) dan (d)

**Kasus 28:**

Tentukan kekonvergenan barisan fungsi .

**Penyelesaian:**

Barisan dinyatakan konvergen pointwise karena memiliki karakteristik berikut:

1. Barisan monoton dimana monoton turun untuk setiap .
2. terbatas sebab untuk setiap .
3. Limit barisannya ada yaitu, .

Berdasarkan karakteristik keterbatasan dari barisan monoton maka diketahui bahwa konvergen pointwise di . jika konvergen pointwise ke 0 untuk maka limitnya ada.

Barisan dinyatakan konvergen seragam karena memiliki karakteristik kekonvergenan seragam. Berikut ini karakteristik barisan fungsi konvergen seragam, yaitu:

1. Barisan monoton dimana naik monoton untuk setiap
2. terbatas sebab untuk setiap .
3. monoton turun dan memiliki infimum yaitu 0.
4. turun seragam sebab untuk setiap terdapat berlaku

Sehingga berdasarkan karakteristik kekonvergenan konvergen seragam ke 0 di .

Dengan demikian, berdasarkan Kasus 2**7** dan Kasus 28 memberikan gambaran tentang karakteristik barisan konvergen pointwise dan kovergen seragam serta ekuivalensinya pada interval [a,b]. suatu barisan fungsi akan konvergen pointwise apabila barisan tersebut adalah barisan monoton dan terbatas. Sedangkan barisan fungsi akan konvergen seragam apabila barisan tersebut adalah barisan monoton, terbatas, memiliki supremum atau infimum dan turun seragam atau naik seragam. Sehingga berdasarkan karakteristik yang harus dipenuhi suatu barisan fungsi, dapat disimpulkan bahwa ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam pada interval [a,b] adalah barisan fungsi terbatas dan monoton seragam. Oleh karena itu, jika barisan fungsi konvergen seragam maka barisan fungsi konvergen pointwise.

# KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa karakteristik yang harus dimiliki suatu barisan fungsi agar terjadi ekuivalensi antara kekonvergenan pointwise dan kekonvergenan seragam yaitu barisan fungsi terbatas dan monoton seragam pada interval [a,b].

# DAFTAR PUSTAKA

[1] Alwi, Wahidah.2012 “*Analisis Real: Landasan Berfikir Formal dalam Matematika”*. Makassar: Alauddin Press

[2] Bartle, R. G dan Donald R. Sherbert. 2000. “*Introduction to Real Analysis”*. 3th. New York : John Wiley and Sons.

[3] Goldberg, Richard R. 1976. “*Method of Reall Analysis”*.New York : John Wiley and Sons.

[4] Gunawan, Hendra. 2009. “*Pengantar Analisis Real”.* Institut Teknologi Bandung

[5] Parhusip, Hanna Arini. 2013.*”Analisa Real”.* Salatiga: Tisara Grafika.

[6] Riyanto, M. Zaky. 2010. “*Pengantar Analisis Real I “*.Universitas Ahmad Dahlan.

[7] Setiawan, Restu Puji & Hartono. 2107 ” *Analisis Kekonvergenan pada Barisan Fungsi*”, Jurnal Matematika Vol 6 No 1 Tahun 2017 Universitas Negeri Yogyakarta.

[8] Trench, William F. 2013. “*Introduction to Real Analysis”*. Trinity University.

[9] Ubaidillah, Firdaus, Soeparna Darmawijaya dan Ch. Rini Indrati. (2013). *“Kekonvergenan Barisan didalam Ruang Fungsi Kontinu C[a,b]”*.Jurnal CAUCHY, Vol. 2 No. 4, halaman 184-188.

1. Prodi Matematika FST, UINAM, wahidah.alwi@uin-alauddin.ac.id

ii Prodi Matematika FST, UINAM, muhirwan@uin-alauddin.ac.id [↑](#endnote-ref-2)
2. iMahasiswa Program Studi Matematika-FST, UINAM, ishakr97@gmail.com [↑](#endnote-ref-3)