

Solusi numerik model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Sulawesi Selatan dengan menggunakan metode *Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)*

Nurinayah Anwar¹, Try Azisah Nurman¹, Hikmawati Patahuddin¹, Muh. Irwan^{1*}

¹Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
Jl. HM. Yasin Limpo 36 Gowa, Sulawesi Selatan, Indonesia. 92113

*E-mail: muhirwan@uin-alauddin.ac.id

Abstrak: Matematika berperan penting dalam perkembangan IPTEK, salah satunya dengan menggunakan model matematika untuk menjelaskan berbagai fenomena yang ada di masyarakat. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui solusi numerik model SIR pada penyakit tuberkulosis dengan menggunakan metode RKF 45. Pada penelitian ini, menggunakan metode *Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)* sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier. Metode RKF 45 adalah metode numerik satu langkah dengan ketelitian yang tinggi dikarenakan memiliki 6 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui solusi sampai orde 5. Model SIR penderita penyakit tuberkulosis yang berbentuk sistem persamaan differensial yang mencakup jumlah populasi individu rentan dengan simbol S (*Susceptible*), populasi individu terinfeksi dengan simbol I (*Infected*), dan populasi individu sembuh dengan simbol R (*Recovered*). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada saat $t = 5000$ dan $h = 0,01$ dengan metode RKF 45 orde empat diperoleh solusi $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59276$, $R_{5000} = 28685.55$, dan metode RKF 45 orde lima diperoleh solusi $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59277$, $R_{5000} = 28685.55$. Berdasarkan hasil penelitian ini dapat diambil kesimpulan bahwa metode RKF 45 merupakan metode numerik dengan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier.

Kata Kunci: model SIR; penyakit tuberkulosis; persamaan diferensial nonlinier; RKF 45; solusi numerik

Abstract: Mathematics plays an important role in the development of science and technology, one of which is by using mathematical models to explain various phenomena that exist in society. This study aims to determine the numerical solution of the SIR model in tuberculosis using the RKF 45 method. In this study, using the Runge Kutta Fehlberg method (RKF 45) as one of the numerical methods to solve systems of nonlinear differential equations. The RKF 45 method is a one-step numerical method with high accuracy because it has 6 calculation constants which play a role in updating solutions up to order 5. The SIR model for tuberculosis sufferers is in the form of a system of differential equations which includes the number of populations of susceptible individuals with the symbol S (*Susceptible*), the population infected individuals with the symbol I (*Infected*), and the individual population recovered with the symbol R (*Recovered*). The results of this study indicate that when $t = 250$ and $h = 0.01$ with the fourth order RKF 45 method, the solution $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59276$, $R_{5000} = 28685.55$, and the fifth order RKF 45 method obtained solutions $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59277$, $R_{5000} = 28685.55$. Based on the results of this study it can be concluded that the RKF 45 method is a numerical method with high accuracy in solving systems of nonlinear differential equations.

Keywords: nonlinear differential equations; numerical solution; RKF 45; SIR models; tuberculosis

PENDAHULUAN

Matematika mempunyai peran penting dalam perkembangan IPTEK (Ilmu Pengetahuan dan Teknologi) di zaman modern ini. Salah satu perkembangannya yaitu model matematika. Banyak fenomena yang ada di kalangan masyarakat yang dapat diamati dan dianalisa menggunakan model matematika (Ulfa & Sugiyanto, 2013). Model matematika merupakan representasi abstrak dari fenomena yang dibangun dengan menggunakan persamaan yang menghasilkan perspektif dari perilaku umum suatu peristiwa (Kurniawati & Rosyidi, 2019). Pemodelan matematika adalah upaya yang dilakukan untuk mendeskripsikan suatu masalah di kehidupan masyarakat dengan menggunakan beberapa ketentuan sehingga menghasilkan asumsi yang dapat digunakan sebagai acuan dalam memodelkan permasalahan tersebut. Persamaan diferensial merupakan salah satu persamaan yang dapat menyelesaikan masalah dalam pemodelan matematika (Nubatonis, 2021). Adapun masalah yang dapat dimodelkan tentang penyakit-penyakit yang ada di seluruh dunia yaitu salah satunya model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis.

Penelitian terkait model matematika telah banyak dilakukan, diantaranya penelitian Setiawan (2017) mengenai analisis dan simulasi model SITR pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar. Selanjutnya penelitian Muhlish (2015) mengenai solusi numerik untuk model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode Adam Bashforth Moulton. Selanjutnya penelitian dari Zahro (2019) tentang solusi numerik model interaksi *Mycobacterium tuberculosis* yang sensitif dan resisten terhadap antibiotik dengan metode Runge Kutta Fehlberg.

Model SIR sangat cocok digunakan untuk menggambarkan dinamika penyebaran suatu penyakit menular, salah satunya pada penyakit tuberkulosis karena model ini dapat memberikan informasi yang sesuai berdasarkan data yang telah diperoleh (Fredlina, 2012). Pada penelitian Inayah et al. (2020), diasumsikan penderita penyakit tuberkulosis dapat sembuh dan memiliki kekebalan tubuh yang permanen sehingga penderita telah sembuh akan pulih dan telah terbebas dari penyakitnya. Model matematika yang akan diformulasikan yaitu dibagi ke dalam 3 kompartemen, yakni kompartemen *susceptible* yaitu kelompok yang rentan terhadap penyakit, kompartemen *infected* yaitu kelompok yang telah terinfeksi penyakit, dan kompartemen *recovered* yaitu kelompok yang telah sembuh dari penyakit.

Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) adalah salah satu metode yang tergolong dalam kelompok metode Runge Kutta Orde-4, yang memiliki tingkat ketelitian hingga orde-5. (Ahmad & Charan, 2016). Ketelitian ini dapat terjadi karena metode ini memiliki 6 konstanta perhitungan yang dapat *update* solusi hingga orde-5. Metode ini merupakan metode yang sering digunakan dan yang paling populer saat ini (Suryaningrat et al. 2020). Berdasarkan uraian latar belakang maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui model SIR dan solusi *numeric model* SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Sulawesi Selatan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45). Solusi yang diperoleh dapat menjadi pertimbangan pada instansi terkait khususnya pada Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan untuk dilakukan beberapa pencegahan untuk meminimalisir besaran jumlah penderita penyakit tuberkulosis Provinsi Sulawesi Selatan.

METODE PENELITIAN

Penelitian dilaksanakan pada bulan Juli tahun 2022. Jenis penelitian ini adalah penelitian kajian teori dan terapan dengan pendekatan kuantitatif yang bertujuan untuk penyebaran penyakit tuberkulosis di Sulawesi Selatan. Jenis data yang digunakan adalah data sekunder, dengan sumber data diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan serta Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Sulawesi Selatan. Penelitian ini menggunakan model matematika yang diformulasikan menjadi 3 kompartemen, yakni kompartemen *susceptible* yaitu kelompok yang rentan terhadap penyakit, kompartemen *infected* yaitu kelompok yang telah terinfeksi penyakit, dan kompartemen *recovered* yaitu kelompok yang telah sembuh dari penyakit.

Prosedur dalam penelitian ini yaitu: (1) Mengambil data sekunder untuk data SIR yang berasal dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan dan BPS Provinsi Sulawesi Selatan; (2) Mencari nilai awal dan nilai parameter yang akan digunakan; (3) Menyelesaikan model SIR menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45); (4) Menginterpretasikan hasil solusi numerik model SIR menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45); dan c(5) Menarik kesimpulan dari hasil solusi numerik model SIR menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45).

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Data sekunder

Berdasarkan data BPS Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2019 jumlah populasi penduduk yang ada di Sulawesi Selatan yaitu sebesar 8.819.549 juta jiwa. Populasi individu *Susceptible* (S) terhadap penyakit tuberkulosis dihitung dengan mengurangkan jumlah populasi penduduk dengan jumlah populasi *Infected* (I), dan populasi *Recovered* (R), yaitu: $S = N - (I + R) = 8.819.549 - (18.863 + 17.024) = 8.783.662$ jiwa. Adapun rincian nilai awal dari kompartemen S, I, dan R dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Rincian nilai awal dari setiap kompartemen yang digunakan dalam pemodelan

| Variabel | Nilai | Keterangan |
|----------|-----------|---|
| S_o | 8.783.662 | Data populasi individu yang rentan terhadap penyakit tuberkulosis di BPS Provinsi Sulawesi Selatan dan Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan akhir tahun 2019 |
| I_o | 18.863 | Data populasi individu yang telah terinfeksi penyakit tuberkulosis di Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan 2019 |
| R_o | 17.024 | Data Populasi individu yang telah sembuh dari penyakit tuberkulosis di Dinas Provinsi Sulawesi Selatan 2019 |

Keterangan: S = populasi *susceptible*; I = populasi *infected*; dan R = populasi *recovered*

2. Nilai parameter model SIR

Nilai parameter-parameter yang akan digunakan pada model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis dapat dilihat pada Tabel 2.

3. Model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis

Adapun asumsi yang digunakan untuk merumuskan model matematika pada penyakit tuberkulosis yaitu sebagai berikut:

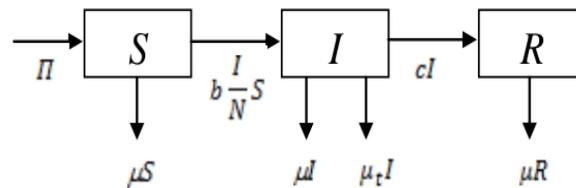
- a. Populasi penduduk bersifat tertutup yang berarti penambahan dan pengurangan penduduk hanya dipengaruhi oleh kelahiran dan kematian, sedangkan penambahan dan pengurangan yang disebabkan oleh faktor lain diabaikan.
- b. Populasi bersifat homogen yang artinya setiap individu mempunyai kemungkinan yang sama untuk dapat terjangkit penyakit tuberkulosis.

- c. Kematian yang disebabkan oleh faktor lain selain terinfeksi tuberkulosis dianggap sebagai kematian alami.
- d. Individu yang belum terserang penyakit termasuk ke dalam kelas *susceptible*.
- e. Individu pada kelas *recovered* tidak akan kembali lagi menjadi individu pada kelas *infected*.
- f. Terjadi kematian akibat terinfeksi tuberkulosis.

Tabel 2. Nilai parameter-parameter pada model SIR penyebaran penyakit tuberkulosis di Provinsi Sulawesi Selatan

| Parameter | Definisi | Formulasi |
|-----------|--|--|
| Π | Laju kelahiran populasi. | $\Pi = \frac{\text{jumlah kelahiran}}{\text{jumlah populasi} * 4} = \frac{168.185}{8.819.549 * 4} = 0,004767392$ |
| μ | Laju kematian alami | $\mu = \frac{1}{\text{angka harapan hidup} * 4} = \frac{1}{70,43 * 4} = 0,00354962$ |
| μ_t | Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit tuberkulosis. | $\mu_t = \frac{\text{jumlah kematian akibat tuberkulosis}}{\text{jumlah individu terinfeksi} * 4} = \frac{772}{18.863 * 4} = 0,01023167$ |
| B | Laju penularan penyakit tuberkulosis dari <i>Susceptible</i> menjadi <i>Infected</i> | $b = \frac{1}{\text{jumlah Suspek}} = \frac{1}{8.783.662} = 0,0000001138$ |
| C | Laju kesembuhan dari <i>Infected</i> menjadi <i>Recovered</i> | $c = \frac{1}{\text{Masa Pemulihan}} = \frac{1}{9} = 0,11111$ |

Berikut model SIR pada penyebaran tuberkulosis berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan:



Selanjutnya disubstitusikan lebih lanjut ke dalam bentuk persamaan biasa yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = f(t, S, I, R) = -b \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - \mu S(t) + \Pi \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = g(t, S, I, R) = b \frac{I(t)}{N(t)} S(t) - (\mu + \mu_t + c) I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = j(t, S, I, R) = cI(t) - \mu R(t) \tag{3}$$

dimana:

- $N(t)$: Jumlah populasi
- $S(t)$: Jumlah individu yang rentan (*Susceptible*)
- $I(t)$: Jumlah individu yang terinfeksi (*Infected*)
- $R(t)$: Banyaknya individu yang telah sembuh (*Recovered*)
- Π : Laju kelahiran populasi
- μ : Laju kematian alami
- μ_t : Laju kematian yang disebabkan oleh penyakit tuberkulosis
- b : Laju penularan penyakit tuberkulosis dari *Susceptible* menjadi *Infected*
- c : Laju kesembuhan dari *Infected* menjadi *Recovered*

4. Solusi numerik model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis

Persamaan yang dihasilkan pada model SIR pada penyebaran penyakit tuberkulosis yaitu persamaan (4.1) sampai (4.3) diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg sebagai berikut.

$$\text{Formula orde-4 : } y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

$$\text{Formula orde-5 : } \hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

Maka diperoleh persamaan (4) hingga (6) untuk Orde 4 dan persamaan (7) hingga (9) untuk Orde 5, yaitu:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (4)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{2565}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 \quad (5)$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{25}{216}n_1 + \frac{1408}{2565}n_3 + \frac{2197}{4104}n_4 - \frac{1}{5}n_5 \quad (6)$$

dan

$$\hat{S}_{i+1} = S_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (7)$$

$$\hat{I}_{i+1} = I_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{56430}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 \quad (8)$$

$$\hat{R}_{i+1} = R_i + \frac{16}{135}n_1 + \frac{6656}{12825}n_3 + \frac{28561}{56430}n_4 - \frac{9}{50}n_5 + \frac{2}{55}n_6 \quad (9)$$

dengan konstanta penghitung, sebagai berikut:

$$k_1 = hf(t_i, S_i, I_i, R_i)$$

$$m_1 = hg(t_i, S_i, I_i, R_i)$$

$$n_1 = hj(t_i, S_i, I_i, R_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{4}h, S_i + \frac{1}{4}k_1, I_i + \frac{1}{4}m_1, R_i + \frac{1}{4}n_1\right)$$

$$m_2 = hg\left(t_i + \frac{1}{4}h, S_i + \frac{1}{4}k_1, I_i + \frac{1}{4}m_1, R_i + \frac{1}{4}n_1\right)$$

$$n_2 = hj\left(t_i + \frac{1}{4}h, S_i + \frac{1}{4}k_1, I_i + \frac{1}{4}m_1, R_i + \frac{1}{4}n_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3}{8}h, S_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, I_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, R_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2\right)$$

$$m_3 = hg\left(t_i + \frac{3}{8}h, S_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, I_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, R_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2\right)$$

$$n_3 = hj\left(t_i + \frac{3}{8}h, S_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, I_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, R_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12}{13}h, S_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, I_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, R_i\right)$$

$$+ \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3$$

$$m_4 = hg\left(t_i + \frac{12}{13}h, S_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, I_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, R_i\right)$$

$$+ \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3$$

$$n_4 = hj\left(t_i + \frac{12}{13}h, S_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, I_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, R_i\right)$$

$$+ \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3$$

$$k_5 = hf\left(t_i + h, S_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, I_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3\right)$$

$$- \frac{845}{4104}m_4, R_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4$$

$$m_5 = hg\left(t_i + h, S_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, I_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3\right)$$

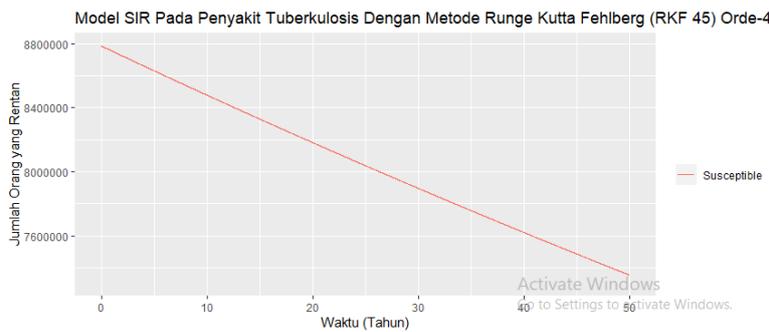
$$- \frac{845}{4104}m_4, R_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4$$

$$\begin{aligned}
 n_5 &= h^j \left(t_i + h, S_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, I_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{845}{4104}m_4, R_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4 \right) \\
 k_6 &= hf \left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, I_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, R_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5 \right) \\
 m_6 &= hg \left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, I_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, R_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5 \right) \\
 n_6 &= hj \left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, I_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, R_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5 \right)
 \end{aligned}$$

Maka akan didapatkan solusi numerik model SIR pada penderita penyakit tuberkulosis dengan menggunakan metode Rungr Kutta Fehlberg (RKF 45) untuk 0,01 tahun pada orde 4 yaitu $S_1 = 8783349,39$, $I_1 = 18839,45$ dan $R_1 = 17044,34$, dan orde 5 yaitu $S_1 = 8783349,37$, $I_1 = 18839,45$ dan $R_1 = 17044,34$, dan untuk solusi numerik untuk 1 tahun pertama untuk metode RKF orde 4 yaitu $S_{100} = 8752539$, $I_{100} = 16648.17$ dan $R_{100} = 18930.55$, dan untuk metode RKF 45 orde 5 yaitu $S_{100} = 8752539$, $I_{100} = 16648.19$ dan $R_{100} = 18930.54$. Serta solusi numerik untuk 50 tahun kedepan untuk metode RKF orde 4 yaitu $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59276$, $R_{5000} = 28685.55$, dan untuk metode RKF 45 orde 5 yaitu $S_{5000} = 7355233$, $I_{5000} = 36.59277$, $R_{5000} = 28685.55$.

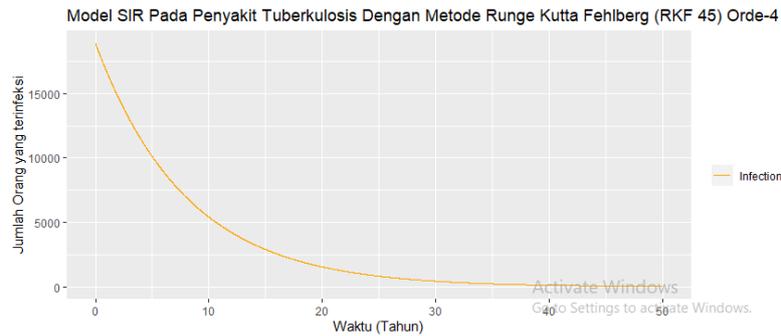
5. Interpretasi hasil

Plot grafik hasil iterasi solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg pada penyebaran penyakit tuberkulosis untuk setiap *Susceptible*, *Infected*, dan *Recovered* menggunakan Program R, akan ditunjukkan pada plot grafik pada Gambar 1.



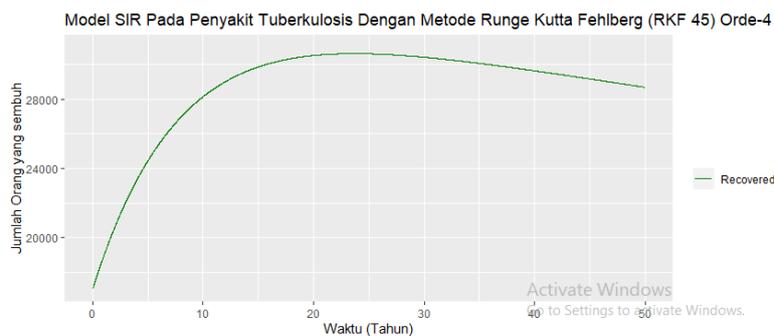
Gambar 1. Penyebaran jumlah *Susceptible* penyakit tuberkulosis RKF 45

Pada Gambar 1 memperlihatkan grafik garis menurun dari waktu ke waktu. Menurunnya populasi *Susceptible* disebabkan karenanya banyaknya populasi yang berpindah menjadi *Infected* yang disebabkan oleh populasi *Susceptible* pernah berkontak langsung dengan populasi *Infected* dan menyebar melalui percikan air liur dari populasi *Infected* yang bersin atau batuk.



Gambar 2. Penyebaran jumlah *Infected* penyakit tuberkulosis RKF 45

Pada Gambar 2 memperlihatkan grafik garis mengalami penurunan secara terus menerus dari waktu ke waktu dan pada waktu tertentu penyakit tersebut akan stabil. Penurunan tersebut terjadi disebabkan karena pengobatan dari pasien tuberkulosis berhasil dan dalam beberapa waktu kedepan populasi yang terinfeksi akan berkurang sehingga mengakibatkan populasi *Recovered* akan mengalami peningkatan.



Gambar 3. Penyebaran jumlah *Recovered* penyakit tuberkulosis RKF 45 Orde 4

Pada Gambar 3 memperlihatkan grafik garis populasi *Recovered* mengalami peningkatan dari waktu ke waktu. Peningkatan populasi *Recovered* disebabkan oleh tingkat pemulihan semakin tinggi dari individu *Infected* menjadi *Recovered*. Adapun peningkatan individu yang sembuh dari penyakit tuberkulosis mencapai puncak maksimal pada iterasi ke 2367 sampai 2373 yang mana mencapai 30.634 jiwa, kemudian iterasi selanjutnya akan mengalami penurunan.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian model SIR pada penyebaran penderita penyakit tuberkulosis di Sulawesi Selatan yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = f(t, S, I, R) = -b \frac{I(t)}{N} S(t) - \mu S(t) + \Pi = -0,0000001138 * \frac{I(t)}{8.819.549} S(t) - 0,001183 S(t) + 0,001589$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = g(t, S, I, R) = b \frac{I(t)}{N} S(t) - (\mu + \mu_t + c) I(t) = 0,0000001138 * \frac{I(t)}{8.819.549} S(t) - (0,001183 + 0,00341 + 0,11111) I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = j(t, S, I, R) = c I(t) - \mu R(t) = 0,11111 I(t) - 0,001183 R(t)$$

Dan hasil solusi numerik menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg dengan jarak langkah $h=0,01$, pada 50 tahun ke depan adalah untuk individu yang rentan sebanyak 7.355233 jiwa dan untuk individu yang terinfeksi sebanyak 36 jiwa serta individu yang sembuh sebanyak 28.685 jiwa.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmad, N., & Charan, S. (2016). Numerical accuracy between Runge-Kutta Fehlberg method and Adams-Bashforth method for first order ordinary differential equations with boundary value problem. *J. Math. Comput. Sci.*, 6(6), 1145-1156.
- Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. Kanada: John Wiley & Sons, Inc.
- Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan. (2021). *Profil Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan Tahun 2021*. Makassar: Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan.
- Fredlina, K. Q., Oka, T. B., & Dwipayana, I. M. A. (2012). Model SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*) untuk penyebaran penyakit tuberkulosis. *E-Jurnal Matematika*, 1(1), 52-58. <https://doi.org/10.24843/MTK.2012.v01.i01.p009>.
- Inayah, N., Manaqib, M., Fitriyati, N., & Yupiter, I. (2020). Model matematika penyebaran penyakit *pulmonary tuberculosis* dengan penggunaan masker medis. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 14(3), 459-470.
- Kurniawati, I., & Rosyidi, A. H. (2019). Profil pemodelan matematika siswa SMP dalam menyelesaikan masalah pada materi fungsi linear. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 8(2), 174-180. <https://doi.org/10.26740/mathedunesa.v8n2.p174-180>.
- Mathews, J. H., & Fink, K. D. (2004). *Numerical Methods Using Matlab*. 4th Editions. New Jersey: The Prentice Hall, Inc.
- Munir, R. (2006). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Nubatonis, O. E. (2021). Model persamaan diferensial orde satu untuk masalah kinematika garis lurus. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 2(1), 54-63. <https://doi.org/10.35508/fractal.v2i1.4039>.
- Ritschel, T. (2013). *Numerical Methods for Solution of Differential Equations*. Lyngby: Departement of Applied Mathematics and Computer Science.
- Rositarini, O., Lestari, D., & 'Arifah, H. (2017). Analisis numerik model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Yogyakarta. *Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika UNY 2017*, 171-178.
- Suryaningrat, W., Ashgi, R., & Purwani, S. (2020). Order Runge-Kutta with extended formulation for solving ordinary differential equations. *International Journal of Global Operations Research*, 1(4), 160-167.
- Tulus. (2015). Numerical study on the stability of Takens-Bogdanov systems. *Buletin of Mathematics*, 4(1), 78-88.
- Ulfa, M., & Sugiyanto, S. (2013). Model matematika untuk kontrol campak menggunakan vaksinasi. *Jurnal Fourier*, 2(2), 97-110.