TRANSFORMASI LINEAR PADA SUATU FUNGSI

Wahyuni Abidin*
*) Dosen pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar
email. *Wahyuni.ridwan@yahoo.co.id*

Abstract : *Linear transformation is one of the important branches of mathematics, especially linear transformation which has many applications in the problems of physics, engineering, social sciences, and various other branches of mathematics. The purpose of this study to determine a function that meets the requirements of linear transformations. The result is a transformation function that is not linear and linear transformation is* $F(x,y)=(2x+y,x-y)$, $F(x,y,z)=(x,x+y-z)$, $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}$ *and* $F(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2)$ *a linear transformation and* $F(x,y,z)=(\sqrt[3]{x},\sqrt[3]{y})$ *dan* $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=ad-bc$ *is not a linear transformation.*

Keywords*:* *Linear transformation*

I. PENDAHULUAN

Ilmu pengetahuan, terdapat ilmu matematika yang berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al hisab. Matematika tidak lain adalah ilmu yang menjadi alat bagi kebutuhan manusia. Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kekuasaan Allah Swt.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Transformasi linear merupakan salah satu cabang matematika yang penting, khususnya tranformasi linear yang mempunyai banyak penerapan dalam persoalan-persoalan fisika, bidang teknik, ilmu sosial, dan berbagai cabang matematika lainnya. Transformasi linear pada suatu fungsi bernilai vektor dari sebuah peubah vektor. Jika V dan W adalah ruang vektor dan F adalah sebuah fungsi yang mengasosiasikan vektor unik di W dengan setiap vektor terletak di V, maka F memetakan V ke dalam W, dan disimbolkan $F{:}V \to W$. Jika F mengasosiasikan vektor dari $\mathbf{v}$, maka disimbolkan $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$ dan dikatakan bahwa $\mathbf{w}$ adalah **bayangan** dari $\mathbf{v}$ di bawah F. Ruang vektor V dinamakan **domain** F.

Berangkat dari latar belakang tersebut penulis menuangkannya dalam bentuk karya tulis ilmiah dengan judul *Transformasi linear pada Suatu Fungsi.*

Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini untuk mengetahui suatu fungsi yang memenuhi syarat- syarat transformasi linear.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. *Fungsi*

1. **Definisi 1**

Fungsi f adalah aturan yang memadakan setiap elemen x dalam suatu himpunan A secara tepat satu elemen, yang disebut $f(x)$, dalam suatu himpunan B. (Jemes Stewart, 2009:15)

Fungsi-fungsi himpunan A dan B adalah himpunan bilangan rill. Himpunan A disebut **daerah asal** (domain) fungsi. Bilangan $f(x)$ adalah nilai dari f pada x. **Daerah hasil** (*range*) dari f adalah himpunan dari semua nilai yang mungkin dari $f(x)$ dimana x bervariasi sepanjang daerah asal. Sebuah simbol yang memrepresentasikan angka sembarang di dalam *daerah asal* dari sebuah sebuah fungsi f disebut **variable bebas**. Sebuah simbol yang memrepresentasikan angka di dalam daerah hasil dari f disebut variable terikat.

B. *Matriks*

2. **Definisi 2 (Howard Anton, 1987:11).**

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Penulisan matriks dapat menggunakan tanda kurung siku [ ] atau tanda kurung biasa ( ). Huruf besar digunakan untuk menyatakan matriks, sedangkan huruf-huruf kecilnya digunakan untuk menyatakan entri-entri matriks. Entri-entri matriks yang berada pada garis horisontal membentuk baris, sedangkan entri-entri yang ada pada garis vertikal membentuk kolom.

Suatu matriks dengan *m* baris dan *n* kolom dikatakan sebagai matriks *m* kali *n* atau matriks tersebut berukuran (berordo) *m x n.* Pasangan bilangan *m* kali *n* disebut ukuran matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) (Ririen Kusumawati, 2009: 2).

C. *Vektor*

3. Definisi 3 (Mahmud Imrona, 2013:14)

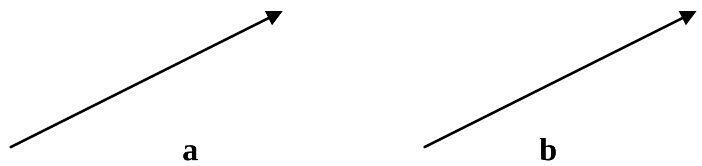
Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.

Vektor-vektor dapat dinyatakan secara geometris sebagai segmen-segmen garis terarah atau panah-panah di ruang-2 dan di ruang-3, arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menyatakan besarnya. Ekor panah dinamakan **titik awal** dari vektor, dan ujung panah dinamakan **titik terminal**. Vektor dinyatakan dengan huruf kecil tebal misalkan, **a, k, v, w,** dan **x.** skalar menyatakan bilangan riil dan dinyatakan huruf kecil biasa misalkan a, k, v, w, dan x.

Operasi-operasi pada Vektor

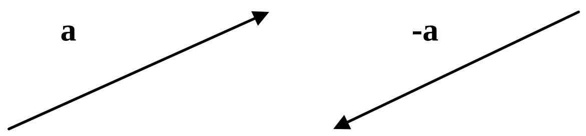
a. Kesamaan Dua Vektor (T. Sutojo, dkk,2010:11)

Vektor **a** dikatakan sama dengan vektor **b (a = b)** bila keduanya mempunyai panjang dan arah yang sama, dengan tidak memperhatikan kedudukan titik pangkal.



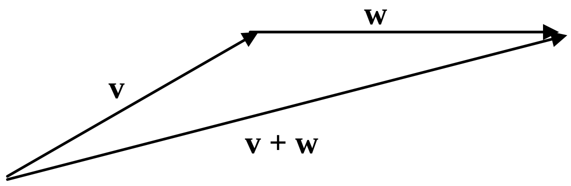
b. Negatif Sebuah Vektor (T. Sutojo, dkk,2010:11)

Vektor (**-a**) adalah vektor yang mempunyai arah berlawanan dengan vektor **a** tetapi panjangnya sama dengan panjang vektor **a.**

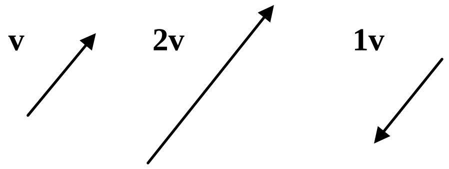


c. Penjumlahan Vektor (Howard Anton,1997:92)

Jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor, maka jumlah **v + w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut. Tempatkan vektor **w** sehingga titik awalnya berimpit dengan titik terminal **v**. Vektor **v + w** dinyatakan oleh panah dari titik awal terhadap titik terminal **w**.



d. Perkalian Vektor dengan Skalar (Howard Anton,1997:93)
Jika **v** adalah vektor taknol dan *k* bilangan riil taknol (skalar), maka hasil kali *k***v** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya *k* kali panjang **v** dan yang arahnya sama seperti arah **v** jika *k* >0 dan berlawanan dengan arah **v** jika *k*<0. Didefinisikan *k***v = 0** jika *k* = 0 atau **v = 0.**



Vektor Ruang-2 dan Vektor Ruang-3

Secara analitik,sebuah vektor pada bidang (R^2) dapat dinyatakan sebagai pasangan bilangan terurut, misalkan **a** = (a_1,a_2), yang digambarkan dalam koordinat dua sumbu yang saling tegak lurus sedangkan vektor dalam ruang-3 (R^3) dapat digambarkan dengan menggunakan koordinat tiga sumbu yang saling tegak lurus, yang mengikuti aturan tangan kanan, dan secara analitik dinyatakan sebagai tiga bilangan terurut, **a** = (a_1, a_2, a_3). Vektor yang titik awalnya di titik asal (0,0) untuk vektor pada bidang dan (0,0,0) untuk vektor dalam ruang disebut vektor posisi.

Pemetaan

Misalkan *A* dan *B* adalah sebarang himpunan bukan kosong. Misalkan setiap elemen pada *A* dihubungkan dengan satu elemen *B* yang unik, kumpulan *f* yang terdiri dari hubungan seperti ini disebut pemetaan dari *A* ke *B*, dan dilambangkan dengan

$$\boldsymbol{f: A \to B}$$

Himpunan *A* disebut daerah asal , dan *B* disebut himpunan target.

Pemetaan Matriks

Misalkan *A* adalah sebarang matriks *m x n* atas *K*. Maka *A* menentukan pemetaan $F_A : K^n \to K^m$ sebagai

$$\boldsymbol{F_A(u) = Au}$$

dimana vektor-vektor pada $K^n \to K^m$ dan ditulis sebagai kolom-kolom.

D. *Transformasi Linear*

4. Definisi 4 (Howard Anton,1997:227)

Jika $F: V \to W$ adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W, maka F dinamakan transformasi linear jika:

(i) $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$

(ii) $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$

Untuk sebarang skalar $a, b \in K$ dan sebarang vektor $v, w \in V$, diperoleh

$$F(av + bw) = F(av) + F(bw) = aF(v) + bF(w)$$

Secara umum, untuk sebarang skalar $a_i \in K$ dan sebarang vektor $v_i \in V$ diperoleh sifat-sifat dasar transformasi linear (pemetaan linear) berikut ini:

$$F(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \ldots + a_m F(v_m)$$

III. PEMBAHASAN

Pada bagian ini, akan dibahas apakah suatu fungsi memenuhi syarat-syarat transformasi linear. Untuk mengetahui suatu fungsi dari ruang vektor V ke dalam ruang vektor W merupakan transformasi linear jika F memenuhi

(i) $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$

(ii) $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$

Fungsi yang merupakan transformasi linear dan yang bukan transfomasi linear.

Jika $F: R^2 \to R^2$ adalah fungsi yang didefinisikan $F(x, y) = (2x + y, x - y)$. Jika $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sehingga,

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= \left(2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\right) \\
&= \left(2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2\right) \\
&= \left(2x_1 + y_1, x_1 - y_1\right) + \left(2x_2 + y_2, x_2 - y_2\right) \\
&= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Jika k adalah sebuah skalar dan $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ maka $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1)$ sehingga

$$\begin{aligned}
F(k\mathbf{u}) &= F(kx_1, ky_1) \\
&= (2kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\
&= k(2x_1 + y_1, x_1 - y_1) \\
&= kF(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Jadi, F merupakan transformasi linear.

Jika *F:R*^{3}→ *R*^{2} adalah fungsi yang didefinisikan $F(x, y, z) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$. Jika $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= \left(\sqrt[3]{x_1 + x_2}, \sqrt[3]{y_1 + y_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

Jadi, *F* merupakan sebuah transformasi linear.

Jika *F:R*^{2}→ *R*^{2} adalah fungsi yang didefinisikan $F(x, y, z) = (x, x + y - z)$. Jika $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= \left(x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)\right) \\
&= \left((x_1, x_1 + y_1 - z_1) + x_2, x_2 + y_2 - z_2\right) \\
&= (2x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (2x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\
&= F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Jika k adalah sebuah skalar dan $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ maka $k\mathbf{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$ sehingga

$$
\begin{aligned}
F(k\mathbf{u}) &= F(kx_1, ky_1, kz_1) \\
&= (kx_1, kx_1 + ky_1 - kz_1) \\
&= k(x_1, x_1 + y_1 - z_1) \\
&= kF(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Jadi, *F* merupakan sebuah transformasi linear.

Jika *F:R*^{3}→ *R*^{2} adalah fungsi yang didefinisikan $F(x, y, z) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$. Jika $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= \left(\sqrt[3]{x_1 + x_2}, \sqrt[3]{y_1 + y_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$$

Jadi, *F* merupakan sebuah transformasi linear.

Jika *F:M*$_{22}$→ *R* adalah fungsi yang didefinisikan $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc.$

Jika $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= F\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \\
&= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)(c_1 + c_2) \\
&= (a_1 d_1 + a_1 d_2 + a_2 d_1 + a_2 d_2) - (b_1 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_2 c_2)
\end{aligned}
$$

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \neq F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b})$$

Jadi, *F* bukan transformasi linear.

Jika *F:M*$_{22}$→ *M*$_{22}$ adalah fungsi yang didefinisikan

$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}$ Jika $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ maka $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$ sehingga,

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = F\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & (b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ (c_1+c_2)+(d_1+d_2) & (d_1+d_2)+(a_1+a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1+a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+b_2 & b_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2+a_2 \end{bmatrix}$$

$$= F(\mathbf{a}) + F(\mathbf{b})$$

Jika k adalah skalar dan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ maka $k\mathbf{a} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$ sehingga

$$F(k\mathbf{a}) = F\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ka_1+kb_1) & (kb_1+kc_1) \\ (kc_1+kd_1) & (kd_1+ka_1) \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} (a_1+b_1) & (b_1+c_1) \\ (c_1+kd_1) & (d_1+a_1) \end{bmatrix}$$

$$= kF\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

$$= kF(\mathbf{a})$$

Jadi, F merupakan transformasi linear.

Jika $F: P_2 \rightarrow P_2$ adalah fungsi yang didefinisikan $F(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2)$. Jika $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dan $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$ maka $p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$ sehingga,

$$F(p+q) = F((a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2)$$

$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)(x+1) + (a_2+b_2)(x+1)^2$$

$$= (a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2) + (b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)^2)$$

$$= F(p) + F(q)$$

Jika k adalah sebuah skalar dan $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ maka

$kp = (ka_0 + ka_1x + ka_2x^2)$ sehingga

$$F(kp) = F(ka_0 + ka_1x + ka_2x^2)$$

$$= ka_0 + ka_1(x+1) + ka_2(x+1)^2$$

$$= k\left(a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2\right)$$
$$= kF(p)$$

Jadi, F merupakan sebuah transformasi linear.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan penelitian ini yaitu untuk mengetahui suatu fungsi yang memenuhi syarat- syarat transformasi linear, maka diperoleh beberapa fungsi yang merupakan transformasi linear dan yang bukan tranformasi linear yaitu $F(x,y) = (2x+y, x-y)$, $F(x,y,z) = (x, x+y-z)$, dan $F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$ $= (a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2)$ merupakan transformasi linear, sedangkan $F(x,y,z) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$ dan $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$ bukan transformasi linear.

DAFTAR RUJUKAN

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer.* Erlangga. Jakarta

Imrona, Mahmud. 2013. *Aljabar Linear Dasar.* Erlangga, Jakarta

Kusumawati, Ririen. 2009. *Aljabar Linear & Matriks.* UIN-Malang Press, Malang.

Lipschutz, Seymour & Lipson Marc. *Teori dan Soal Aljabar linear*. Erlangga, Jakarta.

Sutojo, T, dkk. 2010. *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear & Matriks*. Penerbit Andi. Yokyakarta.