RUANG BANACH PADA RUANG BARISAN ℓ_1, ℓ_p DAN ℓ_∞

Wahidah Alwi*
*) Dosen pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar
e-mail: *wahidah.alwi79@gmail.com*

Abstract: *The main object of the vectors are the vectors can be added together and generate a vector, and produces a number is multiplied by another vector. Any set of objects with properties like this are called "vector space". Mathematical structure to be defined is a Banach space. Clearly defined Banach space vector space of real / complex normed and complete (with respect to the norm). Banach space in this study examined the sequence space* ℓ_1, ℓ_p *and* ℓ_∞. *Based on the purpose of this study is to assess the Banach space within a sequence space* ℓ_1, ℓ_p *and* ℓ_∞, *it is obtained that a sequence space* ℓ_1, ℓ_p *and* ℓ_∞ *form Banach space if it meets the requirements of that sequence space* ℓ_1, ℓ_p *and* ℓ_∞ *is a vector space, normed sequence space, and normed sequence space with complete.*

Key words: *vector space, Banach space, sequence space* ℓ_1, ℓ_p *and* ℓ_∞.

I. PENDAHULUAN

Ruang vektor merupakan suatu himpunan obyek yang dapat dijumlahkan satu sama lain dan dikalikan dengan suatu bilangan, yang masing-masing menghasilkan anggota lain dalam himpunan itu. Struktur matematika yang akan didefinisikan adalah ruang Banach. Secara gamblang ruang Banach diartikan ruang vektor riil/kompleks *bernorma* dan *lengkap* (terhadap norma tersebut). Ruang vektor bernorma V dikatakan lengkap jika terhadap norma $\|\,.\,\|$ dengan $d(a,b) = \|a - b\|$, V merupakan ruang metrik lengkap, yaitu jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) di dalam V (yaitu dengan sifat $\|x_n - x_m\| \to 0$), terdapat $x \in V$ sehingga $\|x - x_n\| \to 0$.

Ruang Hilbert adalah ruang vektor riil atau kompleks yang dilengkapi dengan hasil kali dalam (inner product) dan lengkap. Setiap ruang Hilbert merupakan ruang Banach. Ruang Banach dan ruang Hilbert merupakan prasyarat dalam mempelajari suatu ruang barisan yang akan dikaji dalam tulisan ini. Berdasarkan hal tersebut di atas, maka penulis akan mengkaji ruang Banach ruang Banach dalam suatu ruang barisan yaitu ruang barisan ℓ_1, ℓ_p dan ℓ_∞

II. KAJIAN PUSTAKA

A. *Ruang Vektor*

Obyek utama tentang vektor adalah vektor-vektor dapat dijumlahkan dan menghasilkan vektor, dan dikalikan dengan suatu bilangan menghasilkan vektor lagi. Sebarang himpunan obyek dengan sifat seperti ini disebut "ruang vektor". Pada bagian ini semua anggota himpunan bilangan kompleks ¢ dipandang sebagai "skalar".

Sebelum mendefinisikan ruang vektor V atas ¢ maka ada dua operasi yang harus diperhatikan yaitu:

1. Operasi tambah di dalam himpunan V. Maksudnya adalah jika a, b $\in$ V, maka (a + b) juga di V. Dalam hal ini, V harus tertutup terhadap operasi tambah.
2. Operasi perkalian "skalar" antara anggota – anggota himpunan ¢ dengan anggota –anggota himpunan V. Maksudnya adalah jika $\alpha \in$ ¢ dan a $\in$ V maka α juga di V.

Definisi 2.1.1 (Berberian, 1961:3)

Ruang vektor V atas ¢ adalah himpunan obyek – obyek x, y, z, … disebut vektor. Vektor nol dinotasikan dengan θ, untuk setiap vektor x, negatif dari x dinotasikan dengan –x. Aksioma – aksioma berikut diasumsikan berlaku:

(A) Untuk setiap pasangan vektor x, y di V terdapat vektor yang disebut "jumlah x dan y", dinotasikan x + y di V, dan berlaku:

(A1) x + y = y + x untuk setiap x, y $\in$ V

(A2) x + (y + z) = (x + y) + z untuk setiap x, y, z$\in$ V

(A3) Terdapat dengan tunggal $\theta \in$ V sedemikian sehingga x + θ = x untuk setiap x $\in$ V

(A4) Untuk setiap x $\in$ V, terdapat dengan tunggal –x $\in$ V yang disebut negatif x sedemikian sehingga x + (-x) = θ

(M) Untuk setiap skalar λ dan setiap vektor x di V, terdapat vektor disebut "hasil kali x dengan λ", dinotasikan dengan λx di V, dan berlaku:

(M1) λ(x + y) = λx + λy untuk setiap x, y $\in$ V dan λ adalah skalar

(M2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar

(M3) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar

(M4) $1 . x = x$ untuk setiap $x \in V$

Sebagai catatan, $x + (-y)$ biasa ditulis dengan $x - y$.

Teorema 2.1.2 (Berberian, 1961: 6)

Untuk sebarang ruang vektor:

(i) Persamaan vektor $x + y = z$ mempunyai satu dan hanya satu penyelesaian x

(ii) Jika $z + z = z$ maka $z = \theta$

(iii) $\lambda\theta = \theta$ untuk setiap skalar λ

(iv) $0x = \theta$ untuk setiap vektor x

(v) Jika $\lambda x = \theta$ maka $\lambda = 0$ atau $x = \theta$

Akibat 2.1.3 (Berberian, 1961:7)

Untuk sebarang ruang vektor V berlaku:

(i). $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$

(ii). $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$

(iii). $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$

B. *Ruang Banach*

Struktur matematika yang akan didefinisikan adalah ruang Banach. Secara gamblang ruang Banach diartikan ruang vektor real/kompleks *bernorma* dan *lengkap* (terhadap norma tersebut).

Definisi 2.2.1

Ruang vektor V dikatakan "bernorma" jika terdapat fungsi bernilai riil pada $\| . \| : V \to R$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $\|a\| \geq 0$ untuk setiap $a \in V$
   $\|a\| = 0$ jika dan hanya jika $a = \theta$
2. $\|\alpha a\| = |\alpha| \, \|a\|$ untuk setiap $\alpha \in R$, $a \in V$
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ untuk setiap $a, b \in V$

Sebarang himpunan tak kosong X, disebut *ruang metrik*, jika untuk setiap pasangan $(a,b) \in X \times X$ didefinisikan bilangan riil $d(a,b)$ memenuhi:

(i). $d(a,b) \geq 0$
   $d(a,b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$

(ii). $d(a,b) = d(b,a)$

(iii). d(a,b) ≤ d(a,c) + d(c,b) untuk setiap c $\in$ X

Jika V ruang vektor bernorma (ruang bernorma), maka fungsi d dengan d(a,b) = ||a – b|| memenuhi sifat-sifat metrik (i), (ii), (iii) tersebut di atas. Ini berarti setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik terhadap metrik d, dengan,

$$\mathbf{d(a,b) = \|a - b\|.}$$

Jika untuk setiap sebarang barisan Cauchy (x_n) di dalam ruang metrik X terdapat x $\in$ X sehingga d(x,x_n) $\to$ 0, maka ruang metrik X dikatakan *"lengkap"*.

Sekarang akan didefinisikan ruang Banach sebagai berikut:

Definisi 2.2.2

Ruang vektor bernorma V disebut ruang Banach jika V lengkap di dalam ruang metrik yang didefinisikan oleh norma.

Definisi 2.2.2 menyatakan bahwa ruang vektor bernorma V dikatakan lengkap jika terhadap norma || . || dengan d(a,b) = ||a – b||, V merupakan ruang metrik lengkap, yaitu jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) di dalam V (yaitu dengan sifat $\|x_n - x_m\| \to 0$), terdapat x $\in$ V sehingga $\|x - x_n\| \to 0$.

C. *Ruang Barisan Klasik*

Barisan bilangan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots) = (x_k)_{k\geq 1}$ dengan $x_k \in$ R untuk setiap k disebut barisan bilangan riil. Koleksi semua barisan bilangan riil ditulis dengan W yaitu = { $\bar{x}$ | $\bar{x}$ barisan bilangan riil} dan didefinisikan

1. Penjumlahan dua barisan

   $\bar{x} + \bar{y} = \{x_k + y_k\}_{k\geq 1}$
2. Perkalian barisan dengan bilangan riil α

   $\alpha\bar{x} = \{\alpha \bar{x}\}_{k\geq 1}$.

Terhadap operasi yang didefinisikan pada i) dan ii), cukup jelas bahwa W merupakan ruang vektor terhadap R. Selanjutnya W disebut ruang barisan bilangan riil dan setiap subruang vektor dari W merupakan ruang barisan. Ruang barisan yang dikaji dalam penelitian ini adalah: $\ell_1 = \{(x_k)_{k\geq 1};\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty\}$, $\ell_p = \{(x_k)_{k\geq 1} \mid \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < +\infty\}$ dengan 1 < p < ∞, dan $\ell_\infty = \{\bar{x} = (x_k); \sup_{k\geq 1}|x_k| < +\infty\}$ **Definisi 2.4.1**

Ruang barisan klasik ℓ_1 adalah koleksi dari semua barisan bilangan riil (x_k) yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty$, dan ditulis dengan :

$$\ell_1 = \{(x_k)_{k\geq 1};\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty\}.$$

Diberikan norma pada ℓ_1 sebagai berikut:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \,.$$

Definisi 2.4.2

Ruang barisan klasik ℓ_p adalah koleksi semua barisan bilangan riil (x_k) yang memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$ dan ditulis dengan,

$$\ell_p = \{(x_k)_{k\geq 1} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\} \text{ dengan } 1 < p < \infty,$$

dengan norma pada ℓ_p diberikan sebagai berikut :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < +\infty \text{ dengan } 1 < p < \infty.$$

Definisi 2.4.3

Ruang barisan klasik ℓ_∞ adalah koleksi semua barisan bilangan terbatas dengan norma $\|x\|_\infty = \sup\{|x_k|;\ k \geq 1\}$, ditulis singkat:

$$\ell_\infty = \{ x = (x_k); \sup_{k\geq 1} |x_k| < +\infty\},$$

dengan norma pada ℓ_∞ diberikan sebagai berikut:

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k| \,.$$

III. TUJUAN PENELITIAN

Penelitian ini bertujuan untuk mengakaji ruang Banach dalam suatu ruang barisan yaitu ruang barisan ℓ_1, ℓ_p dan ℓ_∞.

IV. PEMBAHASAN

A. *Ruang Barisan Klasik* ℓ_1

Tunjukkan bahwa $\ell_1 = \{(x_k)_{k\geq 1};\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty\}$ terhadap norma $\|.\|$ dengan $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ merupakan:

1. Ruang vektor
2. Ruang barisan bernorma
3. Ruang barisan bernorma yang lengkap (Ruang Banach)

Bukti:

a. Akan ditunjukkan bahwa $\ell_1 = \{(x_k)_{k\geq 1};\ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty\}$ merupakan ruang vektor. Ambil sebarang $x = (x_k)_{k\geq 1}$, $y = (y_k)_{k\geq 1} \in \ell_1$ dan $\alpha \in R$, maka

   1) $x + y \in \ell_1$, sebab dipenuhi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[|x_k| + |y_k|\right] = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k| < +\infty$$

2) $\alpha x \in \ell_1$, sebab dipenuhi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha|\,|x_k| = |\alpha|\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty$$

b. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_1 = $\{(x_k)_{k\ge1};\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty\}$ merupakan ruang barisan bernorma. Ambil sebarang x = $(x_k)_{k\ge1}$, y = $(y_k)_{k\ge1}$ $\in \ell_1$ dan $\alpha \in$ R, maka:

1) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| \ge 0$, jelas, karena $|x_k| \ge 0$, $\forall$ k.

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0\ \ \forall k$$

$$\Leftrightarrow x_k = 0\ \forall k$$

$$\Leftrightarrow x = \theta$$

2) $\|\alpha x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha x_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha|\,|x_k| = |\alpha|\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = |\alpha|\,\|\bar{x}\|_1$

3) $\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left[|x_k| + |y_k|\right]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1$$

c. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_1 = $\{(x_k)_{k\ge1};\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| < +\infty\}$ merupakan ruang barisan bernorma yang lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\left(x^{(n)}\right)_{n\ge1} \in \ell_1$, dengan $\left(x^{(n)}\right)_{n\ge1} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...\right)$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon >$ 0 terdapat $n_0 \in$ N sehingga untuk semua m, n > n_0 berlaku:

$$\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \varepsilon \text{ ………………..(1)}$$

diperoleh, untuk setiap k = 1, 2, …, berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \varepsilon \text{ untuk setiap n, m > } n_0 \text{ ………(2)}$$

Dipilih k tetap. Dari (2) dapat dilihat bahwa ($x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, …) barisan Cauchy atas bilangan riil. Karena R lengkap, maka barisan tersebut konvergen, misalkan $x_k^{(n)} \to x_k$, untuk n $\to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ $\forall$ k $\ge$ 1.

Dengan menggunakan limit tersebut didefinisikan x = (x_1, x_2, …), dari sini tinggal ditunjukkan bahwa $x^{(n)} \to x$ dan $x \in \ell_1$.

Dari (1) diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{\ell}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \varepsilon,\ (\ell = 1, 2, \ldots)$$

Dengan mengambil n $\to \infty$ dan m > n_0, maka diperoleh:

$$\sum_{k=1}^{\ell}\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon,\ (\ell = 1, 2, \ldots)$$

Dengan mengambil $\ell \to \infty$, maka untuk m > n_0, diperoleh:

$$\left\|x^{(m)} - x\right\| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k\right| \le \varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Dengan kata lain terbukti $x^{(n)} \to x$, untuk n $\to \infty$.

Sekarang, $x \in \ell_1$, sebab dipenuhi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(m)} + x_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}\right|$$

$$= \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}\right| < +\infty$$

Karena ℓ_1 merupakan ruang bernorma dan lengkap maka ℓ_1 merupakan ruang Banach.

D. *Ruang Barisan Klasik* ℓ_p *(1 < p < ∞).*

Tunjukkan bahwa $\ell_p = \{(x_k)_{k\ge1} \mid \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p < +\infty\}$ dengan 1 < p < ∞ terhadap norma || . || dengan norma $\left\|x\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} < +\infty$ merupakan:

1. Ruang vektor
2. Ruang barisan bernorma
3. Ruang barisan bernorma yang lengkap (Ruang Banach)

Bukti:

a. Akan ditunjukkan bahwa $\ell_p = \{(x_k)_{k\ge1} \mid \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p < +\infty\}$ dengan 1 < p < ∞ merupakan ruang vektor. Ambil sebarang $x = (x_k)_{k\ge1}$, $y = (y_k)_{k\ge1} \in \ell_p$ dan $\alpha \in$ R, maka

   1) $x + y \in \ell_p$, sebab dipenuhi:

   $$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^p\, maks\left\{\left|x_k\right|^p, \left|y_k\right|^p\right\} \le 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|x_k\right|^p + \left|y_k\right|^p\right)$$

   $$= 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p + 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p < +\infty$$

   2) $\alpha x \in \ell_p$, sebab dipenuhi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha\ x_k\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha\right|^p\ \left|x_k\right|^p = \left|\alpha\right|^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p < +\infty$$

b. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_p = $\{(x_k)_{k\geq 1} \mid \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p < +\infty\}$ dengan $1 < p < \infty$ merupakan ruang barisan bernorma. Ambil sebarang $x = (x_k)_{k\geq 1}$, $y = (y_k)_{k\geq 1} \in \ell_p$, dan $\alpha \in R$ maka:

1) $\left\|x\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} \geq 0$, jelas, karena $\left|x_k\right|^p \geq 0$, $\forall$ k.

$$\left\|x\right\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} = 0 \Leftrightarrow \left|x_k\right|^p = 0\ \ \forall k$$

$$\Leftrightarrow x_k = 0\ \forall k$$

$$\Leftrightarrow x = \theta$$

2) $$\left\|\alpha\, x\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha\, x_k\right|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\alpha\right|^p\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} = \left|\alpha\right|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left|\alpha\right|\ \left\|x\right\|_p$$

3) Misalkan q = p(p-1) dan karena $\{x_k + y_k\}_{k\geq 1} \in \ell_p$. Maka diperoleh $\{(x_k + y_k)^{p-1}\}_{k\geq 1} \in \ell_q$. Dan dengan menggunakan ketaksamaan Holder (Misalkan p > 1 dan misalkan q = $\dfrac{p}{p-1}$, jika $x = \{x_k\}_{k\geq 1} \in \ell_p$ dan $y = \{y_k\}_{k\geq 1} \in \ell_p$, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ konvergen mutlak dan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^q\right)^{1/q}\ )$$

deret $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{p-1}\left|y_k\right|$dan $\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{p-1}\left|x_k\right|$ konvergen dan,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{p-1}\ \left|x_k\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{p-1}\ \left|y_k\right|$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^p\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p}\right).$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k + y_k\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k\right|^p\right)^{1/p}$$

Terbukti

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

c. Akan ditunjukkan bahwa $\ell_p = \{(x_k)_{k\geq 1} \mid \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < +\infty\}$ dengan $1 < p < \infty$ merupakan ruang barisan bernorma. Ambil sebarang barisan Cauchy $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 1} \in \ell_p$, dengan $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 1} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\geq 1}$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk semua m, n > n_0 berlaku:

$$\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{.....................(1)}$$

diperoleh untuk $k \geq 1$, berlaku

$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right| < \varepsilon$ untuk setiap n, m > n_0 ………(2)

Dipilih k tetap. Dari (2) dapat dilihat bahwa ($x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, …) barisan Cauchy atas bilangan riil. Karena R lengkap, maka barisan tersebut konvergen, misalkan $x_k^{(n)} \to x_k$, untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \ \forall \ k \geq 1$.

Dengan menggunakan limit tersebut didefinisikan x = (x_1, x_2, …), dari sini tinggal ditunjukkan bahwa $x^{(n)} \to x$ dan $x \in \ell_p$.

Dari (1) diperoleh:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \text{, untuk m, n} \geq 0$$

dengan mengambil $n \to \infty$ dan m > n_0, maka diperoleh:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon$$

$$\left\|x^{(m)} - x\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{.................(3)}$$

Dengan kata lain terbukti $x^{(n)} \to x$, untuk $n \to \infty$.

Sekarang, x $\in \ell_p$, untuk $1 < p < \infty$ sebab dipenuhi:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_m^{(m)} - x_k^{(m)} + x_k\right|^p = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(x_k - x_k^{(m)}\right) + x_k^{(m)}\right|^p$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^p \, maks\left\{\left|x_k - x_k^{(m)}\right|^p, \left|x_k^{(m)}\right|^p\right\}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^p \left(\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p + \left|x_k^{(m)}\right|^p\right)$$

$$= 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p + 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}\right|^p < \varepsilon + 2^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}\right|^p < +\infty$$

Karena ℓ_p, untuk 1 < p < ∞ merupakan ruang bernorma dan lengkap maka ℓ_p, untuk 1 < p < ∞ adalah ruang Banach.

E. *Ruang Barisan Klasik* ℓ_∞.

Tunjukkan bahwa ℓ_∞ = $\{ x = (x_k); \sup_{k \geq 1} |x_k| < +\infty \}$ terhadap norma $\|.\|$ dengan $\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k|$ merupakan:

1. Ruang vektor
2. Ruang barisan bernorma
3. Ruang barisan bernorma yang lengkap (Ruang Banach)

Bukti:

a. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_∞ = $\{ x = (x_k); \sup_{k \geq 1} |x_k| < +\infty \}$ merupakan ruang vektor. Ambil sebarang x = $(x_k)_{k\geq 1}$; $x_k \in R$ y = $(y_k)_{k \geq 1}$ $y_k \in R$ dan $\alpha \in R$, maka

1) $x + y \in \ell_\infty$, sebab

$$x \in \ell_\infty \Rightarrow \sup_{k \geq 1} |x_k| < \infty$$

$$y \in \ell_\infty \Rightarrow \sup_{k \geq 1} |y_k| < \infty$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \sup_{k \geq 1} |x_k + y_k| \\ &\leq \sup_{k \geq 1} \left[|x_k| + |y_k| \right] \\ &= \sup_{k \geq 1} |x_k| + \sup_{k \geq 1} |y_k| < +\infty \end{aligned}$$

2) $\alpha x \in \ell_1$, sebab dipenuhi:

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |\alpha x_k| = \sup_{k \geq 1} |\alpha| \ |x_k| = |\alpha| \sup_{k \geq 1} |x_k| < +\infty$$

b. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_∞ = $\{ x = (x_k); \sup_{k \geq 1} |x_k| < +\infty \}$ merupakan ruang barisan bernorma. Ambil sebarang x = $(x_k)_{k \geq 1}$, y = $(y_k)_{k \geq 1} \in \ell_\infty$ dan $\alpha \in R$, maka:

1) $\|x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |x_k| \geq 0$, jelas, karena $|x_k| \geq 0$, ∀ k.

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \sup_{k \geq 1} |x_k| = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \ \forall k \\ &\Leftrightarrow x_k = 0 \ \forall k \\ &\Leftrightarrow x = (x_k)_{k \geq 1} = \theta = (0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

2) $\|\alpha x\|_\infty = \sup_{k \geq 1} |\alpha \ x_k| = |\alpha| \sup_{k \geq 1} |x_k| = |\alpha| \ \|x\|_\infty$

3) $\|x+y\|_\infty = \sup_{k\geq 1}|x_k + y_k| \leq \sup_{k\geq 1}\left[|x_k| + |y_k|\right] = \sup_{k\geq 1}|x_k| + \sup_{k\geq 1}|y_k|$

$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

c. Akan ditunjukkan bahwa ℓ_∞ = $\{ x = (x_k); \sup_{k\geq 1}|x_k| < +\infty \}$ merupakan ruang barisan bernorma yang lengkap. Diambil sebarang barisan Cauchy $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 1} \in \ell_\infty$, dengan $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 1} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...\right)$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk semua m, n > n_0 berlaku:

$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_\infty < \varepsilon$ ………………..(1)

ekivalen dengan $\sup_{k\geq 1}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \varepsilon$ ……..(2)

Ini berarti bahwa $\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| < \varepsilon$ untuk k = 1, 2, … dan n, m ≥ n_0.

Selanjutnya dipilih k tetap. Barisan ($x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, …) adalah barisan Cauchy atas bilangan riil dan R lengkap. Jadi barisan tersebut konvergen; katakan konvergen ke x_k, untuk $n \to \infty$ atau $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$ $\forall$ k ≥ 1.

Dengan menggunakan limit tersebut didefinisikan x = (x_1, x_2, …), dari sini tinggal ditunjukkan bahwa $x^{(n)} \to x$ dan $x \in \ell_\infty$.

Dari (2) diperoleh:

$\sup\left\{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| : 1 \leq k \leq \ell;\ \ell = 1, 2, \ldots\right\} < \varepsilon$

Dengan mengambil $n \to \infty$ dan m > n_0, maka diperoleh:

$\sup\left\{\left|x_k - x_k^{(m)}\right| : 1 \leq k \leq \ell;\ \ell = 1, 2, \ldots\right\} < \varepsilon,$

Dengan mengambil $\ell \to \infty$, maka untuk m > n_0, diperoleh:

$\left\|x - x^{(m)}\right\|_\infty = \sup_{k\geq 1}\left|x_k - x_k^{(m)}\right| = \sup_{k\geq 1}\left|x_k^{(m)} - x_k\right| < \varepsilon$ ………………(3)

Dengan kata lain terbukti $x^{(n)} \to x$, untuk $n \to \infty$.

Sekarang, $x \in \ell_\infty$, sebab dipenuhi:

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 1}\left|x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)}\right|$$

$$\leq \sup_{k\geq 1}\left\{\left|x_k - x_k^{(n)}\right| + \left|x_k^{(n)}\right|\right\}$$

$$= \sup_{k\geq 1}\left|x_k - x_k^{(n)}\right| + \sup_{k\geq 1}\left|x_k^{(n)}\right| < \varepsilon + \sup_{k\geq 1}\left|x_k^{(n)}\right| < +\infty$$

Karena ℓ_∞ merupakan ruang bernorma dan lengkap maka ℓ_∞ merupakan ruang Banach.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan tujuan penelitian ini yaitu untuk mengkaji ruang Banach dalam suatu ruang barisan ℓ_1, ℓ_p dan ℓ_∞, maka diperoleh bahwa suatu ruang barisan ℓ_1, ℓ_p dan ℓ_∞ membentuk ruang Banach jika memenuhi syarat-syarat yaitu ruang barisan ℓ_1, ℓ_p dan ℓ_∞ merupakan ruang vektor, ruang barisan bernorma, dan ruang barisan bernorma yang lengkap.

DAFTAR RUJUKAN

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga, Jakarta.

Bartle, G. Robert. 1982. *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons. Inc, New York

Berberian.K, Sterling. 1961. *Introduktion to Hilbert Space*. Oxpord University Press, New York

Echols, John. M dan Hassan Shadily. 1975. *Kamus Inggris Indonesia*. PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta

Klambauer, Gabriel. 1973. *Real Analysis*. American Elseviser Publishing Company, Inc, New York.

Maddox, I. J. 1970. *Element of Functional Analisis*. Cambridge at The University Press.

P. Y. Lee. *Zeller Theory And Classical Sequence Spaces.* National University of Singapore, Singapore.

Randolph. F, John. 1968. *Basic Riil and Abstract Analisis*. Academic Press, New York and London.

Rudin, Walter. 1986. *Riil and Complex Analisis*. Mc Graw-Hill International Edition, New York.

Sukarjono. 2000. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Universitas Negeri Yogyakarta, Yokyakarta.